Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Test – Version C
19. bis 21. Januar 2010

(1) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen $L(A,0) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$, $L(A,b) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$ und $L(A,c) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$ der linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$. Dabei seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $0 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 12 & 16 & 0 \\ 5 & 15 & 20 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

(2) Die Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ seien gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß (a_1, a_2, a_3) eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des Schmidt-Algorithmus (möglichst einfache) Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit den Eigenschaften
- $\mathbb{R}\,a_1 = \mathbb{R}\,u_1$
- $\mathbb{R}\,a_1 + \mathbb{R}\,a_2 = \mathbb{R}\,u_1 + \mathbb{R}\,u_2$
- $\mathbb{R}\,a_1 + \mathbb{R}\,a_2 + \mathbb{R}\,a_3 = \mathbb{R}\,u_1 + \mathbb{R}\,u_2 + \mathbb{R}\,u_3$
- $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$.

Dabei sei $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(c) Verwandeln Sie die *orthogonale* Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ in eine *orthonormale* Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $x = 1, 1, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ bezüglich der orthonormalen Basis (v_1, v_2, v_3).