Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Test – Version C
Lösungen

19. bis 21. Januar 2010

(1) Die Matrix

$$(A\,|\,0\,|\,b\,|\,c) = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 2 & 6 & 8 & 1 & 0 & 16 & 16 \\ 4 & 12 & 16 & 0 & 0 & 20 & 21 \\ 5 & 15 & 20 & 1 & 0 & 31 & 32 \end{array}\right)$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 5 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)$$

verwandelt werden, wobei α, β, γ reelle Zahlen mit $\gamma \neq 0$ sind, welche von den verwendeten Zeilenoperationen abhängen.

Daraus folgt:

$$L(A,0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L(A,b) = L(A,0) + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad L(A,c) = \emptyset\,.$$

(2) ad (a):

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ verwandelt werden.

ad (b):

Entsprechend dem SCHMIDT-Algorithmus setzen wir zunächst

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a_2 - \frac{\langle u_1, a_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\,u_1 \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \frac{3}{14}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Wahl von u_1 und u_2 folgt

$$a_3 - \frac{\langle u_1, a_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, a_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{15}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{42} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten insgesamt

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

ad (c):

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ad (d):

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \langle x, v_3 \rangle v_3 = \frac{6}{\sqrt{14}} v_1 + \frac{2}{\sqrt{42}} v_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} v_3 .$$