

**Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010**

**Test – Version A
Lösungen**

19. bis 21. Januar 2010

(1) Die Matrix

$$(A|0|b|c) = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 3 & 6 & 0 & 9 & 0 & 21 & 21 \\ 2 & 4 & 4 & 22 & 0 & 38 & 40 \\ 4 & 8 & 1 & 16 & 0 & 34 & 35 \end{array} \right)$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)$$

verwandelt werden, wobei α, β, γ reelle Zahlen mit $\gamma \neq 0$ sind, welche von den verwendeten Zeilenoperationen abhängen.

Daraus folgt:

$$L(A, 0) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(A, b) = L(A, 0) + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(A, c) = \emptyset.$$

(2) ad (a):

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

kann durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ verwandelt werden.

ad (b):

Entsprechend dem SCHMIDT-Algorithmus setzen wir zunächst

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a_2 - \frac{\langle u_1, a_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der Wahl von u_1 und u_2 folgt

$$a_3 - \frac{\langle u_1, a_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, a_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{4}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{18}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen also

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten insgesamt

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

ad (c):

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ad (d):

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \langle x, v_3 \rangle v_3 = \frac{6}{\sqrt{14}} v_1 - \frac{1}{\sqrt{35}} v_2 + \frac{2}{\sqrt{10}} v_3.$$