die.hak die.has
Innsbruck

Markus Paul (BHAK Innsbruck):
Berufsbild Mathematiklehrer/in
an Handelsakademien

Institut für Mathematik, 04.12.2013

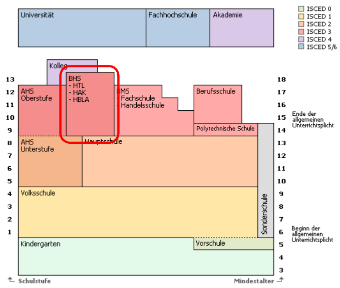
Programm

- Schultyp Handelsakademie
- Mathematik an Handelsakademien (Stundentafel, Lehrplan)
- Technologieeinsatz (GTR, EXCEL, CAS)
- Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik: exemplarische Aufgaben
  - Matrizenrechnung
  - Effektivverzinsung
  - Kostentheorie
  - Konfidenzintervalle

Prof. Mag. Dr. Markus Paul

- Matura am BG u. BRG Bludenz
- Lehramtsstudium Mathematik und Germanistik an der Uni Innsbruck
- Doktoratsstudium Germanistik
- Unterrichtstätigkeit an Handelsakademien (BHAK Schwaz und BHAK Innsbruck)
- Mitautor des Schulbuchs Tinhof u.a.: Mathematik für HAK. Trauner Verlag, Linz
- ARGE-Leiter für Mathematik an HAK Tirols
- Item-Writer für schriftliche Reife- und Diplomprüfung

HAK im österreichischen Schulsystem



Schultyp Handelsakademie

- berufsbildende fünfjährige höhere Schule
- Schwerpunkt auf kaufmännischer und betriebswirtschaftlicher Ausbildung (Fächer Rechnungswesen und Betriebswirtschaftslehre)
- Zwei (bis drei) Fremdsprachen
- Abschluss mit Reife- **und** Diplomprüfung
- Studienberechtigung **und** Berufsberechtigungen (Bürokaufmann, Großhandelskaufmann)

Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS		
BHS		
Summe:	42.393	100%

Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
BHS	23.827	56 %
Summe:	42.393	100 %

Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2008 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2011):

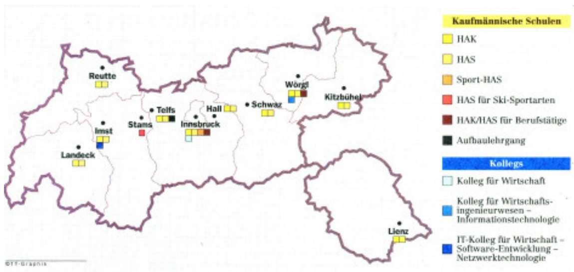
Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
HTL		
HAK		
HUM		
LW		
BAKIP		
Summe:	42.393	100 %

Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
HTL	9.904	23 %
HAK	6.379	15 %
HUM	4.936	12 %
LW	722	2 %
BAKIP	1.886	4 %
Summe:	42.393	100 %

Handelsakademien in Tirol



Mathematik an Handelsakademien

- Lehrplan HAK 2004: 10 h Mathematik

A. Pflichtgegenstände	Wochenstunden 1)					
	Jahrgang					
Kernbereich	I.	II.	III.	IV.	V.	
1. Religion	2	2	2	2	2	10
2. Deutsch	3	3	3	2	3	14
3. Englisch einschließlich Wirtschaftssprache	2	3	3	3	3	14
4. Lebende Fremdsprache 2)	3	2	3	3	3	14
5. Geschichte (Wirtschafts- und Sozialgeschichte)	-	-	3	2	-	5
6. Geografie (Wirtschaftsgeografie)	2	3	-	-	-	5
7. Internationale Wirtschafts- und Kulturräume	-	-	-	-	2	2
8. Chemie	3	-	-	-	-	3
9. Physik	-	3	-	-	-	3
10. Biologie, Ökologie und Warenlehre	-	-	2	2	2	6
11. Mathematik und angewandte Mathematik	-	3	2	3	2	10
12. Betriebswirtschaft	3	3	3	2	2	13
13.-14. Betriebswirtschaftliche Übungen und Projektmanagement						
13. Persönlichkeitsbildung und soziale Kompetenz	2	-	-	-	-	2
14. Businesstraining, Projekt- und Qualitätsmanagement, Übungsfirma und Case Studies	-	2	2	3	1	8
15. Rechnungswesen und Controlling 3)	4	3	3	2	2	14
16. Wirtschaftsinformatik	2	2	2	-	-	6
17. Informations- und Officemanagement 4)	3	2	2	-	-	7
18. Politische Bildung und Recht	-	-	-	3	-	3
19. Volkswirtschaft	-	-	-	-	3	3
20. Leibesübungen	2	2	2	1	1	8
Summe Kernbereich	31	33	32	28	26	**140-150**

Mathematik an Handelsakademien

- Lehrplan Mathematik 2004

II . Jahrgang:
Basislehrstoff:
Zahlensysteme, Zahlenmengen, Terme und Potenzen.
Funktionen, Umkehrfunktionen.
Gleichungen und Ungleichungen, Gleichungssysteme, numerische Lösungen.
Matrizen.
Beschreibende Statistik (Einführung und Trendlinie) und deren grafischen Darstellungsformen.
Erweiterungslehrstoff:
Ungleichungssysteme. Vektoren. Aussagenlogik. Boolsche Algebra.
IT-Bezug: Gesamter Lehrstoff. Computereinsatz mit entsprechender Software (CAS und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

III. Jahrgang:
Basislehrstoff:
Trigonometrische Funktionen, Anwendungen.
Wachstums- und Abnahmeprozesse.
Rekursive Darstellung von Folgen, Differenzengleichungen.
Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Schuldtilgung.
Komplexe Aufgabenstellungen.
Erweiterungslehrstoff:
Simulation dynamischer Systeme. Kryptografie, Codierungstheorie.
IT-Bezug: Computereinsatz mit entsprechender Software (Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Übungsfirmen-Konnex: Finanzmathematik.
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

Mathematik an Handelsakademien

- Lehrplan Mathematik 2004

IV. Jahrgang:
Basislehrstoff:
Grundlagen der Differenzialrechnung, Kosten- und Preistheorie.
Integralbegriff.
Kurs- und Rentabilitätsrechnung; Investitionsrechnung.
Komplexe Aufgabenstellungen.
Erweiterungslehrstoff:
Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung. Integralrechung. Aktienanalyse.
IT-Bezug: Computereinsatz mit entsprechender Software (Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Übungsfirmen-Konnex: Investitionsrechnung.
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

V. Jahrgang:
Basislehrstoff:
Beurteilende Statistik.
Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktionen, Regressionsrechnung, Korrelation; Kontingenz.
Komplexe Aufgabenstellungen.
Erweiterungslehrstoff:
Kombinatorische Hilfsmittel, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Simulation wirtschaftlicher Modelle.
Vertiefung und Verknüpfung von Lehrstoffinhalten aller Jahrgänge. Schließende Statistik. Lineare Optimierung. Aktienanalyse.
IT-Bezug: Computereinsatz mit entsprechender Software (Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

Technologieeinsatz

- Lehrplan Mathematik 2004

II . Jahrgang:
Basislehrstoff:
Zahlensysteme, Zahlenmengen, Terme und Potenzen.
Funktionen, Umkehrfunktionen.
Gleichungen und Ungleichungen, Gleichungssysteme, numerische Lösungen.
Matrizen.
Beschreibende Statistik (Einführung und Trendlinie) und deren grafischen Darstellungsformen.
Erweiterungslehrstoff:
Ungleichungssysteme. Vektoren. Aussagenlogik. Boolsche Algebra.
IT-Bezug: Gesamter Lehrstoff. Computereinsatz mit entsprechender Software (CAS und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

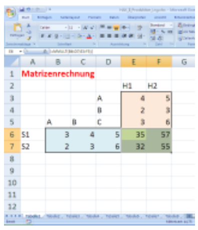
III. Jahrgang:
Basislehrstoff:
Trigonometrische Funktionen, Anwendungen.
Wachstums- und Abnahmeprozesse.
Rekursive Darstellung von Folgen, Differenzengleichungen.
Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Schuldtilgung.
Komplexe Aufgabenstellungen.
Erweiterungslehrstoff:
Simulation dynamischer Systeme. Kryptografie. Codierungstheorie.
IT-Bezug: Computereinsatz mit entsprechender Software (Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).
Übungsfirmen-Konnex: Finanzmathematik.
Schularbeiten: Zwei einstündige Schularbeiten (bei Bedarf zweistündig).

Technologien

Grafischer Taschenrechner: TI-82Stats, TI-84plus

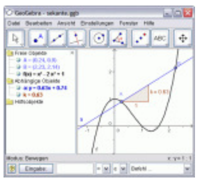
Mindeststandard für Zentralmatura BHS

Tabellenkalkulation: EXCEL



Einsatz im MM-Unterricht vom Ministerium erwünscht

Computeralgebrasystem: Geogebra



ab 4.0 mit Tabellenkalkulation und CAS

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Matrizenrechnung
  (aus: Tinhof u.a.: HAK II. Trauner Verlag)

Ein Produktionsbetrieb erzeugt in den Hallen H_1 und H_2 in zwei Schichten S_1 und S_2 die Produkte A, B und C. Die Produktionshöhe in beiden Hallen je Schicht und die Produktionskosten in den zwei Schichten sind den folgenden Tabellen zu entnehmen:

Kosten in beiden Schichten je ME in GE:

	A	B	C
S_1	3	4	5
S_2	2	3	6

Produktion in beiden Hallen je Schicht in ME:

	H_1	H_2
A	4	5
B	2	3
C	3	6

Es sollen die Produktionskosten je Schicht für die beiden Hallen ermittelt werden.

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Matrizenrechnung

Zur Lösung der Aufgabe ist also die Kostenmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ mit der Produktionsmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ zu multiplizieren.

Mit dem Schema von Falk ergibt sich:

				H_1	H_2
			A	4	5
			B	2	3
	A	B	C	3	6
S_1	3	4	5	35	57
S_2	2	3	6	32	55

Die Produktionskosten betragen in der Halle 1 in der Schicht S_1 35 GE und in der Schicht S_2 32 GE.
Die Produktionskosten betragen in der Halle 2 in der Schicht S_1 57 GE und in der Schicht S_2 55 GE.

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Matrizenrechnung mit EXCEL:

E6 {=MMULT(B6:D7;E3:F5)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matrizenrechnung						
2					H1	H2	
3				A	4	5	
4				B	2	3	
5		A	B	C	3	6	
6	S1	3	4	5	35	57	
7	S2	2	3	6	32	55	
8							

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Finanzmathematik: Leasing
  (aus: Tinhof u.a.: HAK III. Trauner Verlag)

Leasingangebot für ein Mittelklasseauto mit Kaufpreis € 21.790,00:

Kassapreis	€ 21.790,00	
Anzahlung	€ 2.148,00	bei Vertragsabschluss zu zahlen
Restwert	€ 5.980,00	gleichzeitig mit der letzten Rate zu zahlen
60 nachschüssige Monatsraten à	€ 369,00	erstmals einen Monat nach Vertragsabschluss

- Welche Effektivverzinsung hat dieses Leasingangebot?

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Finanzmathematik

Leasingangebot für ein Mittelklasseauto mit Kaufpreis € 21.790,00:

Kassapreis	€ 21.790,00	
Anzahlung	€ 2.148,00	bei Vertragsabschluss zu zahlen
Restwert	€ 5.980,00	gleichzeitig mit der letzten Rate zu zahlen
60 nachschüssige Monatsraten à	€ 369,00	erstmals einen Monat nach Vertragsabschluss

Wir berechnen die Effektivverzinsung.

Äquivalenzgleichung:

$$21\,790 = 2\,148 + 369 \cdot (1+i)^{-\frac{1}{12}} + \ldots + 369 \cdot (1+i)^{-\frac{60}{12}} + 5\,980 \cdot (1+i)^{-\frac{60}{12}}$$

$$19\,642 = \sum_{t=1}^{60} \frac{369}{(1+i)^{\frac{t}{12}}} + 5\,980 \cdot (1+i)^{-\frac{60}{12}}$$

Wir erhalten die Lösung mit Technologie: $i = 0{,}1318$

Der Effektivzinssatz ist ca. 13,18 %.

$$\text{nsolve}\left(19642 = \sum_{t=1}^{60} \left(369 \cdot (1+i)^{-t/12}\right) + 5980 \cdot (1+i)^{-60/12}, i = 0.1\right) \Rightarrow .131798$$

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Finanzmathematik mit EXCEL:

	A	B	C	D	E
1	Leasing Effektivverzinsung				
2	mit Funktion ZINS:				
3	ZZR =	60			
4	RMZ =	369			
5	BW =	-19642			
6	ZW =	5980			
7	Zins =	1,0371%	=ZINS(B3;B4;B5;B6)		
8	i =	13,1798%	=(1+B7)^12-1		
9					
10	mit Barwerttabelle und Zielwertsuche:				
11	i =	13,1798%			
12		Summe =	9,1853E-05		
13		Rückflüsse	abgezinste Rt		
14	t in Monaten	Rt in Euro	Rt/(1+i)^(t/12)		
15	0	-19642	-19642,00	=B15/(1+B11)^(A15/12)	
16	1	369	365,21		
17	2	369	361,46		
18	3	369	357,75		
19	4	369	354,08		
20	5	369	350,45		

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Finanzmathematik mit GTR:

Solver:

```
EQUATION SOLVER
eqn:0=-19642+369
*(1-R^-60)/(R-1)
+5980/R^60
```

```
-19642+369*(1…=0
 R=1.0103706681…
 bound={-1ᴇ99,1…
```

```
R^12-1
        .1317975724
```

TVM-Solver:

```
 N=60
▪I%=13.17975724
 PV=-19642
 PMT=369
 FV=5980
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```


Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Kostentheorie
  (aus: Tinhof u.a.: HAK IV. Trauner Verlag)

Die Kosten eines Monopolbetriebs zeigen einen s-förmigen Verlauf und lassen sich annähernd durch die kubische Polynomfunktion mit $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 50x + 1500$ beschreiben.

a) Ermitteln Sie die Kostenkehre und die Grenzkosten in der Kostenkehre.

b) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum und zeigen Sie, dass im Betriebsoptimum die Stückkosten gleich den Grenzkosten sind.

Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Kostentheorie

b) $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 50x + 1500$ Kosten

$K'(x) = 0{,}03x^2 - 1{,}5x + 50$ Grenzkosten

$k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}01x^2 - 0{,}75x + 50 + \frac{1500}{x}$ Durchschnittskosten, Stückkosten

$k'(x) = 0{,}02x - 0{,}75 - \frac{1500}{x^2}$ Grenzstückkosten

Betriebsoptimum (Minimum der Stückkosten): Setze $k' = 0$

$0 = 0{,}02x - 0{,}75 - \frac{1500}{x^2}$

$0 = 0{,}02x^3 - 0{,}75x^2 - 1500$

mit Technologie:

$x = 59{,}03$

Bei einer Produktion von 59,03 ME sind die Stückkosten minimal.

$k(59{,}03) = 65{,}98$

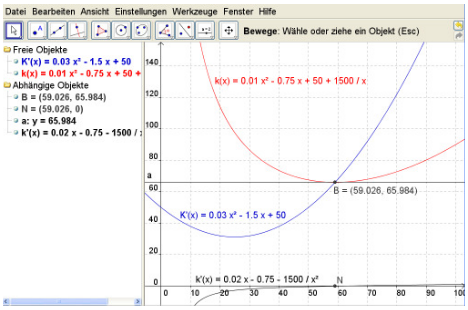
Die minimalen Stückkosten betragen 65,98 GE/ME.

$K'(59{,}03) = 65{,}98$

Die Grenzkosten betragen im Betriebsoptimum 65,98 GE/ME

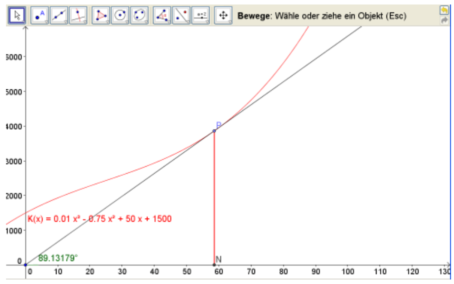
Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Kostentheorie mit Geogebra



Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Lösung Kostentheorie mit Geogebra



Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

- Statistik: Konfidenzintervalle
  (aus: Tinhof u.a.: HAK V. Trauner Verlag)

Telefonumfrage von Gallup eine Woche vor den Nationalratswahlen 2006 mit n = 500. Nach der gegebenen Umfrage hätten bei den Nationalratswahlen am Wochenende vor den Nationalratswahlen 2006 die VP 38 %, die SP 35 %, die Grünen 10 % und die FP 10 % der Stimmen erhalten.

Berechnen Sie die Konfidenzintervalle für den Stimmenanteil der jeweiligen Partei.

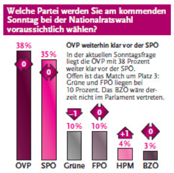
Geben Sie die Schwankungsbreite für alle berechneten Intervalle an.

Welches Intervall liefert die größte Unsicherheit?

Vergleichen Sie mit den tatsächlichen Ergebnissen der Wahl: SPÖ 35,3 %; ÖVP: 34,3 %; FPÖ: 11 %; Grüne: 11%

Haben die Wahlprognosen das Wahlergebnis richtig vorhergesagt?

Konfidenzniveau c = 95 %



Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

Lösung Statistik

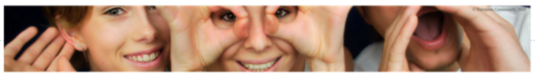
95%-KI: z = 1,96

Schwankungsbreite ÖVP: $e = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}38 \cdot 0{,}62}{500}} = 0{,}0425 \approx 4{,}3\,\%$

Konfidenzintervall für Anteilswert der ÖVP: [38% – 4,3%; 38% + 4,3%] = [33,7%; 42,3%]
Das Wahlergebnis 34,3% liegt im KI.

Schwankungsbreite SPÖ: $e = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{500}} = 0{,}0418 \approx 4{,}2\,\%$

Konfidenzintervall für Anteilswert der ÖVP: [35% – 4,2%; 35% + 4,2%] = [30,8%; 39,2%]
Das Wahlergebnis 35,3% liegt im KI.



Wir freuen uns,
Sie als Kollege/in
an einer Handelsakademie
begrüßen zu dürfen.

Herzlichen Dank
für Ihre Aufmerksamkeit.

die.hak die.has
Innsbruck