Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 für Lehramtsstudierende Sommersemester 2015

13. April 2015

10) Was ist eine *Isometrie* eines euklidischen Raums, was ist eine *orthogonale Funktion*? Welche Beziehung besteht zwischen Isometrien und orthogonalen Funktionen? Welche der folgenden Funktionen sind Isometrien, welche orthogonal?

$$a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \,,\ (x, y) \longmapsto (-y - 1, x + 3) \,,$$
$$b : \mathbb{R}^{\,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{\,2} \,,\ (x, y) \mapsto (2y, 2x) \,,$$
$$c : \mathbb{R}^{\,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{\,2} \,,$$
$$(x, y) \mapsto (\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y,) \,.$$

11) Wie verändert sich die Matrix einer linearen Funktion, wenn anstatt der Basen $\underline{v}$ im Definitionsbereich und $\underline{w}$ im Bildbereich die Basen $\underline{v}S$ und $\underline{w}T$ (S, T invertierbar) gewählt werden?
Es seien $g : \mathbb{R}^{\,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{\,2}$, $(a, b) \longmapsto (b, a)$, $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{\,2}$ und $\underline{v} := \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass g linear und dass $\underline{v}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{\,2}$ ist. Skizzieren Sie den Graphen von g durch einige Pfeile in der Ebene. Berechnen Sie die Matrizen $M(g, \underline{e})$ und $M(g, \underline{v})$ von g. Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.

12) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle a + bi, c + di \rangle := ac + bd \,,\ \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{R} \,.$$

Es seien $z := \cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})$ und

$$m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,, a \longmapsto z \cdot a \,,$$

die Multiplikation mit z. Zeigen Sie, dass m eine orthogonale Funktion ist. (Hinweis: $\langle y, z \rangle$ ist der Realteil von $y \cdot \bar{z}$).