Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 5

9. bis 10. Dezember 2009

(35) (a) $X = \{x_1, x_2\}$ resp. $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ sei eine Menge mit $\#(X) = 2$ resp. $\#(Y) = 3$.

Wie viele Elemente haben die Mengen

- $\mathcal{F}(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y\}$ aller Abbildungen von X nach Y
- $\mathcal{F}(Y,X) = \{\, g \mid g : Y \to X\}$ aller Abbildungen von Y nach X?

(b) Zeigen Sie durch Induktion über m,, daß für je zwei endliche Mengen X und Y mit $\#(X) = m \geq 0$ und $\#(Y) = n \geq 0$ die Beziehung $\#(\mathcal{F}(X,Y)) = n^m$ gilt.

Erinnerung:
Ist E eine endliche Menge, so bezeichnet $\#(E)$ die Anzahl aller Elemente von E.

(36) (a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ seien die Polynomfunktionen mit $f(x) = 2 + 3x$ und $g(x) = 7 - 5x + 6x^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Berechnen Sie die Funktionen

- $fg : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x)$
- $gf : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto (gf)(x) = g(x)f(x)$
- $f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $g \circ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(b) Sind die Funktionen $fg : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ Polynomfunktionen, wenn $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *beliebige* Polynomfunktionen sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

(37) Für $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0) \neq (b_1, b_2, b_3)$ ist
$U := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\,\}$ resp.
$V := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0\,\}$
ein *Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$.
Ist außerdem $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so ist
$E := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c\,\}$ resp.
$F := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d\,\}$
ein zu U resp. V paralleler *affiner Unterraum* von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V)$, $\dim_{\mathbb{R}}(E)$, $\dim_{\mathbb{R}}(F)$.
Was bedeutet das geometrisch?

(b) Wie lassen sich der Untervektorraum $W := U \cap V$ von $\mathbb{R}^3$ und der affine Unterraum $G := E \cap F$ von $\mathbb{R}^3$ als Lösungsräume linearer Gleichungssysteme (also in *impliziter Form*) beschreiben?

(c) Welche Beziehung besteht zwischen dem Untervektorraum W und dem affinen Unterraum G?

(d) Finden Sie eine implizite Darstellung *und* eine Darstellung in Parameterform von $W = U \cap V$ und von $G = E \cap F$ für die folgenden Fälle:

- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2),\ (b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 4),\ c = 1,\ d = 2$
- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2),\ (b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 4),\ c = 1,\ d = 3$
- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2),\ (b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 5),\ c = 1,\ d = 3$.

(e) Bestimmen Sie für die in (d) angegebenen Fälle jeweils $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(G)$ und überlegen Sie, was das geometrisch bedeutet!

(38) $G = \{\, p + su \mid s \in \mathbb{R} \,\}$ und $H = \{\, q + tv \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ seien die Geraden in $\mathbb{R}^3$ mit $p = (5, 1, 1),\ q = (-5, -4, -6),\ u = (1, 1, 1),\ v = (9, 4, 6)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Geraden G und H genau einen Schnittpunkt $r \in \mathbb{R}^3$ haben und bestimmen Sie r!

(b) Aus (a) folgt, daß die Geraden G und H eine eindeutig bestimmte Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ aufspannen. Stellen Sie die Ebene E *in Parameterform* dar!

(c) Finden Sie eine *implizite Darstellung* der Ebene E, also eine Darstellung der Form $E = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \,\}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

Anleitung:
Man findet den Punkt $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ sowie das 4-tupel $(a_1, a_2, a_3, c) \in \mathbb{R}^4$ als Lösungen geeigneter linearer Gleichungssysteme.

(39) V sei ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$.
Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V und ist $(u_1, \ldots, u_n)$ das n-tupel von paarweise orthogonalen Vektoren $u_k \in V$ mit

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}\, u_i \quad \text{für} \quad 1 \le k \le n\,,$$

dann gilt für $1 \le k \le n$ jeweils $\mathbb{R}\, a_1 + \cdots + \mathbb{R}\, a_k = \mathbb{R}\, u_1 + \cdots + \mathbb{R}\, u_k$.
Zeigen Sie das durch Induktion über k $(1 \le k \le n)$.

(40) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standard-Skalarprodukt
$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.

(a) Zeigen Sie, daß das 4-tupel (a_1, a_2, a_3, a_4) bestehend aus den Vektoren
$a_1 = (1, 1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 0, 1),\ a_3 = (1, 0, 1, 1),\ a_4 = (0, 1, 1, 1)$
eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^4$ ist!

(b) Finden Sie eine ON-Basis (w_1, w_2, w_3, w_4) von $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft
$\mathbb{R}\, a_1 + \cdots + \mathbb{R}\, a_k = \mathbb{R}\, w_1 + \cdots + \mathbb{R}\, w_k$ für $1 \le k \le 4$!

(c) Zeigen Sie *ohne Verwendung* des Standard-Skalarproduktes und der ON-Basis (w_1, w_2, w_3, w_4), daß der Punkt $x = (6, 2, 9, 1) \in \mathbb{R}^4$ in dem Unterraum $U := \mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 + \mathbb{R}\, a_3 = \mathbb{R}\, w_1 + \mathbb{R}\, w_2 + \mathbb{R}\, w_3$ von $\mathbb{R}^4$ liegt und berechnen Sie die Koordinaten von x bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis (a_1, a_2, a_3) von U!

(d) Zeigen Sie *mit Verwendung* des Standard-Skalarproduktes und der ON-Basis (w_1, w_2, w_3, w_4), daß der Punkt x in dem Unterraum U liegt und berechnen Sie die Koordinaten von x bezüglich der ON-Basis (w_1, w_2, w_3) von U!