Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 4

24. bis 26. November 2009

(29) Finden Sie für jedes der folgenden Systeme linearer Gleichungen eine Darstellung seiner gesamten Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 5x_5 &= 0\\
3x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 8x_5 &= 0\\
3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 7x_5 &= 0\\
3x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 5x_5 &= 2\\
3x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 8x_5 &= 3\\
3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 7x_5 &= 2\\
3x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 5x_5 &= 2\\
3x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 8x_5 &= 4\\
3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 4x_4 - 7x_5 &= 2\\
3x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 1
\end{aligned}$$

(30) A und B seien die folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Gibt es Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $XA = B$ und $AY = B$?
- Finden Sie gegebenenfalls Matrizen X und Y mit $XA = B$ und $AY = B$!
- Sind die Matrizen X und Y – falls solche existieren – durch die Bedingungen $XA = B$ und $AY = B$ eindeutig bestimmt?

Anleitung:
Untersuchen Sie zuerst, ob die Matrix A *invertierbar* ist und berechnen Sie falls möglich die zu A inverse Matrix!

(31) Bestimmen Sie für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & -8 \\ 3 & 12 & 1 & 9 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 5}$$

- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(M, 0)$ des zu M gehörigen homogenen Gleichungssystems $Mx = 0$

- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(M)$ der Matrix M
- die Dimensionen $\dim(L(M,0))$ und $\dim(S(M))$ der Untervektorräume $L(M,0) \leq \mathbb{Q}^{5\times 1}$ und $S(M) \leq \mathbb{Q}^{3\times 1}$
- den Rang $\operatorname{rg}(M)$ der Matrix M.

Welche Beziehung besteht zwischen den Zahlen $\dim(L(M,0))$, $\dim(S(M))$ und $\dim(\mathbb{Q}^{5\times 1})$?

(32) $M \in \mathbb{Q}^{3\times 5}$ sei die Matrix aus Aufgabe (31).

(a) Ist die in Aufgabe (31) bestimmte $\mathbb{Q}$-Basis des Untervektorraumes $L(M,0)$ von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ auch eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$?
Wenn das nicht der Fall ist, dann soll sie zu einer $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ ergänzt werden.

(b) Ist die in Aufgabe (31) bestimmte $\mathbb{Q}$-Basis des Untervektorraumes $S(M)$ von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ auch eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$?
Wenn das nicht der Fall ist, dann soll sie zu einer $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ ergänzt werden.

(c) Berechnen Sie die Koordinatenspalte des Elementes

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 1}$$

bezüglich der in (a) gefundenen Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$!

(d) Berechnen Sie die Koordinatenspalte des Elementes

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$$

bezüglich der in (b) gefundenen Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$!

(33) Berechnen Sie für die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 9 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

- die Permutationen $\sigma \circ \tau,\ \tau \circ \sigma,\ \sigma^{-1},\ \tau^{-1},\ (\sigma \circ \tau)^{-1},\ (\tau \circ \sigma)^{-1}$
- die Zyklenzerlegungen der genannten acht Permutationen
- die Vorzeichen der genannten acht Permutationen.

(34) Stellen Sie die Permutation

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

als ein Produkt von Transpositionen dar!

Bemerkung:
Im Gegensatz zu den Zyklen einer Zyklenzerlegung von ρ sind die Transpositionen eines solchen Produktes *weder* elementfremd *noch* eindeutig bestimmt!