Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 4 – Lösungen

24. bis 26. November 2009

(29) Lösung von Aufgabe (29):

Die drei angegebenen Gleichungssysteme sind $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die um die Spalten 0, b, c erweiterte Koeffizientenmatrix A, also die Matrix

$$(A \,|\, 0 \,|\, b \,|\, c) = \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(A' \,|\, 0 \,|\, b' \,|\, c') = \left(\begin{array}{ccccr|c|r|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

wobei die Matrix in Stufenform A' und die Spalte c' – unabhängig von den verwendeten Zeilenumformungen – eindeutig bestimmt sind, während das für die Spalte b' *nicht* gilt.

Damit ist

$$L(A,0) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\},$$
$$L(A,b) = \emptyset,$$
$$L(A,c) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 + z \,|\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\},$$

wobei w_1, w_2 und z die folgenden Spaltenvektoren sind:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(30) Lösung von Aufgabe (30):

Die um die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ erweiterte Matrix A, also die Matrix

$$(A \,|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(I \,|\, A') = \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -10/6 & -1/6 & 4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/6 & 2/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & -1/6 & 0/6 \end{array}\right).$$

Also ist A *invertierbar* und es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für *beliebige* Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ gilt

$XA = B \implies X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = BA^{-1}\,,$
$AY = B \implies Y = IY = (A^{-1}A)Y = A^{-1}(AY) = A^{-1}B$

und umgekehrt

$X = BA^{-1} \implies XA = (BA^{-1})A = B(AA^{-1}) = BI = B\,,$
$Y = A^{-1}B \implies AY = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B\,.$

Also gelten die Aussagen

$XA = B \iff X = BA^{-1}\,,$
$AY = B \iff Y = A^{-1}B\,.$

Daraus folgt:
Es gibt Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $XA = B$ und $AY = B$, welche durch diese Bedingungen *eindeutig bestimmt* sind, nämlich

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 & -2 & 12 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß $X \neq Y$ ist!

(31) Lösung von Aufgabe (31):

Durch elementare Zeilenumformungen verwandelt man die Matrix M in die (durch M eindeutig bestimmte) Matrix in Stufenform

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

- Das Tripel (w_1, w_2, w_3) mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(M, 0)$ des Systems $Mx = 0$.

- Das Paar $(t_1, t_2) = (M_{-1}, M_{-3})$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(M)$ der Matrix M.
Diese Behauptung folgt aus der Tatsache, daß das Paar (M'_{-1}, M'_{-3}) offensichtlich eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(M')$ der Matrix M' ist und daß bei elementaren Zeilenumformungen lineare Beziehungen zwischen den Spalten einer Matrix erhalten bleiben. Dabei bezeichnet wie üblich M_{-j} resp M'_{-j} die j-te Spalte der Matrix M resp. M' $(1 \leq j \leq 5)$.

- $\dim(L(M, 0)) = 3$
- $\dim(S(M)) = 2 = \mathrm{rg}(M)$
- $\dim(L(M, 0)) + \dim(S(M)) = 3 + 2 = 5 = \dim(\mathbb{Q}^{5\times 1})$.

(32) Lösung von Aufgabe (32):

Wir verwenden die in der Lösung von Aufgabe (31) eingeführten Bezeichnungen.

ad (a) und (c):

Wegen $\dim(\mathbb{Q}^{5\times 1}) = 5$ hat *jede* $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ genau 5 Elemente.
Also ist (w_1, w_2, w_3) *keine* $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Hingegen ist (w_1, w_2, w_3) ein *linear unabhängiges* System von Vektoren aus $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ und die Standard-Basis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ in $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ ein *Erzeugendensystem* von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$. Nach Satz 97 des Skriptums zur Vorlesung gibt es folglich Indices i und j mit $1 \leq i < j \leq 5$ derart, daß $(w_1, w_2, w_3, e_i, e_j)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ ist. Die Indices i und j mit dieser Eigenschaft sind durch (w_1, w_2, w_3) nicht eindeutig bestimmt, doch erhält man die *kleinsten* derartigen Indices nach Satz 105 des Skriptums, indem man die Matrix

$$W = (w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,|\, e_4 \,|\, e_5) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in Stufenform verwandelt. Man erhält die Matrix

$$W' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

deren Pivot-Spalten die Spalten W'_{-1} ,W'_{-2}, W'_{-3}, W'_{-4}, W'_{-6} sind.

Daraus folgt, daß $(W'_{-1}, W'_{-2}, W'_{-3}, W'_{-4}, W'_{-6})$ eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(W')$ der Matrix W' und daher $(W_{-1}, W_{-2}, W_{-3}, W_{-4}, W_{-6}) = (w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(W)$ der Matrix W ist. Es gilt jedoch $S(W) = \mathbb{Q}^{5\times 1}$. Also ist

$$(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3) = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Die Koordinatenspalte $r \in \mathbb{Q}^{5\times 1}$ des Elementes $u \in \mathbb{Q}^{5\times 1}$ bezüglich der soeben berechneten $\mathbb{Q}$-Basis $(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$ von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, e_1 \,|\, e_3)\, r = u$, also des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix $(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, e_1 \,|\, e_3)$ resp. die Spalte u dieses Gleichungssystems verwandelt man durch *dieselben* elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ resp. die Spalte

$$u' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Da die linearen Gleichungssysteme $(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3 \,|\, e_1 \,|\, e_3)\, r = u$ und $Ir = u'$ *dieselben* Lösungen haben, ist $r = u'$ die Koordinatenspalte von $u \in \mathbb{Q}^{5\times 1}$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$.

ad (b) und (d):

Diese Aufgaben löst man genau so wie die Aufgaben (a) und (c).

Wegen $\dim(\mathbb{Q}^{3\times 1}) = 3$ ist (t_1, t_2) *keine* $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$.

Um (t_1, t_2) zu einer $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ zu ergänzen, verwandeln wir die Matrix

$$T = (t_1 \,|\, t_2 \,|\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standard-Basis in $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ sei, durch elementare Zeilenumformungen in die Stufenmatrix

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Pivot-Spalten die Spalten T'_{-1}, T'_{-2}, T'_{-3} sind.

Also ist $(T'_{-1}, T'_{-2}, T'_{-3})$ eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(T')$ von T' und folglich $(T_{-1}, T_{-2}, T_{-3}) = (t_1, t_2, e_1)$ eine $\mathbb{Q}$-Basis des Spaltenraumes $S(T)$ von T. Wegen $S(T) = \mathbb{Q}^{3\times 1}$ ist somit

$$(t_1, t_2, e_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$.

Die Koordinatenspalte $s \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ des Elementes $v \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ bezüglich der soeben gefundenen $\mathbb{Q}$-Basis (t_1, t_2, e_1) von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $(t_1 \,|\, t_2 \,|\, e_1)\, s = v$, also des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem läßt sich in üblicher Weise durch elementare Zeilenumformungen in das lineare Gleichungssystem $Is = v'$ verwandeln, wobei $I \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix und

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Da die Gleichungssysteme $(t_1 \,|\, t_2 \,|\, e_1)\, s = v$ und $Is = v'$ dieselben Lösungen haben, ist $s = v'$ die Koordinatenspalte von $v \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis (t_1, t_2, e_1).

(33) Lösung von Aufgabe (33) :

Die *Zyklenzerlegungen* der angegebenen Permutationen aus S_8 lauten :

$$\begin{aligned}
\sigma &= (1\ 2\ 5) \circ (3\ 6) \circ (4\ 7\ 9\ 8) \\
\tau &= (1\ 3\ 4\ 7) \circ (2) \circ (5\ 6\ 9) \circ (8) \\
\sigma \circ \tau &= (1\ 6\ 8\ 4\ 9) \circ (2\ 5\ 3\ 7) \\
\tau \circ \sigma &= (1\ 2\ 6\ 4) \circ (3\ 9\ 8\ 7\ 5) \\
\sigma^{-1} &= (1\ 5\ 2) \circ (3\ 6) \circ (4\ 8\ 9\ 7) \\
\tau^{-1} &= (1\ 7\ 4\ 3) \circ (2) \circ (5\ 9\ 6) \circ (8) \\
(\sigma \circ \tau)^{-1} &= (1\ 9\ 4\ 8\ 6) \circ (2\ 7\ 3\ 5) \\
(\tau \circ \sigma)^{-1} &= (1\ 4\ 6\ 2) \circ (3\ 5\ 7\ 8\ 9.
\end{aligned}$$

Bei der Darstellung einer Permutation als Hintereinanderausführung von Zykeln läßt man meistens das Symbol $\circ$ sowie Zykeln der Länge 1 (das heißt Fixpunkte) weg. Man schreibt also beispielsweise $\tau = (1\ \ 3\ \ 4\ \ 7)\,(5\ \ 6\ \ 9)$. Allerdings wird dann nicht mehr deutlich, daß τ eine Permutation der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und *nicht* der Menge $\{1,3,4,5,6,7,9\}$ sein soll!

Die *Vorzeichen* der genannten Permutationen sind entsprechend Definition 122 des Skriptums:

$$\begin{array}{rcccl}
\operatorname{sign}(\sigma) & = & (-1)^{9-3-0} & = & +1 \\
\operatorname{sign}(\tau) & = & (-1)^{9-2-2} & = & -1 \\
\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) & = & (-1)^{9-2-0} & = & -1 \\
\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) & = & (-1)^{9-2-0} & = & -1 \\
\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) & = & (-1)^{9-3-0} & = & +1 \\
\operatorname{sign}(\tau^{-1}) & = & (-1)^{9-2-2} & = & -1 \\
\operatorname{sign}((\sigma\circ\tau)^{-1}) & = & (-1)^{9-2-0} & = & -1 \\
\operatorname{sign}((\tau\circ\sigma)^{-1}) & = & (-1)^{9-2-0} & = & -1\,.
\end{array}$$

(34) Lösung von Aufgabe (34):

Die Zyklenzerlegung der Permutation $\rho \in S_5$ lautet $\rho = (1\ \ 4\ \ 3)\,(2\ \ 5)$.
Es gilt $(1\ \ 4\ \ 3) = (1\ \ 4)\,(4\ \ 3) = (1\ \ 4)\,(3\ \ 4)$. Also ist $\rho = (1\ \ 4)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$.

Da für je drei paarweise verschiedene Elemente $i,j,k \in \{1,2,3,4,5\}$ die Beziehung $(i\ \ k) = (i\ \ j)\,(j\ \ k)\,(i\ \ j)$ gilt, ist aber auch

$\rho = (1\ \ 2)\,(2\ \ 4)\,(1\ \ 2)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 3)\,(3\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 5)\,(4\ \ 5)\,(1\ \ 5)\,(3\ \ 4)\,(2\ \ 5)$ und
$\rho = (1\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(1\ \ 4)\,(1\ \ 3)\,(2\ \ 5)$ und so weiter ...