Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 3
10. bis 12. November 2009

(21) Berechnen Sie für die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

sukzessive alle Potenzen $A^p \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ und überlegen Sie, welche Gestalt diese Potenzen haben!

Erinnerung:
Es ist $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2A$ u.s.w.

(22) $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ sei eine quadratische Matrix über einem beliebigen Körper K mit der Eigenschaft

$(*)$ $A_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $1 \le j < i + 1$.

Zeigen Sie:

(a) Für $p = 1, 2, 3\ldots$ hat die p-te Potenz $A^p = ((A^p)_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ der Matrix A die Eigenschaft

$(**)$ $(A^p)_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $1 \le j < i + p$.

(b) Für alle $p \ge n$ ist $A^p \in K^{n\times n}$ die Nullmatrix.

Was bedeutet $(**)$ für die Gestalt der Matrix A^p, falls $n = 4$ und $p = 1, 2, 3, 4$ ist?

(23) (a) Welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ sind *Matrizen in Stufenform*?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

(b) Markieren Sie für jede Matrix in (a), welche eine Matrix in Stufenform ist, alle *Pivots* und alle *Pivot-Spalten* und bestimmen Sie jeweils

- die Anzahl r der Pivot-Spalten und die Anzahl s der Nicht-Pivot-Spalten
- die Spaltenindices $p(1) < \ldots < p(r)$ der Pivot-Spalten
- die Spaltenindices $q(1) < \ldots < q(s)$ der Nicht-Pivot-Spalten.

(24) (a) Schreiben Sie die folgenden Systeme linearer Gleichungen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{Q}$ in der Form $Ax = 0$ resp. $Ax = b$ mit passender Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und passender Spalte $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ an! Von welcher Art ist jeweils die Matrix A?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 7 \\ x_2 + 3x_4 &= 6 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_4 &= -4 \\ x_3 - 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_5 + 5x_6 &= 0 \\ x_3 + 3x_5 - 6x_6 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 + 7x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_5 + 5x_6 &= 9 \\ x_3 + 3x_5 - 6x_6 &= 8 \\ x_4 - 2x_5 + 7x_6 &= 7 \end{aligned}$$

(b) Finden Sie mittels der Methode aus Kapitel 2 der Vorlesung für jedes der *homogenen* Systeme linearer Gleichungen aus (a) eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(A, 0)$ von $Ax = 0$.

(c) Finden Sie mittels der Methode aus Kapitel 2 der Vorlesung für jedes der *inhomogenen* Systeme linearer Gleichungen aus (a) wenigstens eine Lösung von $Ax = b$ sowie eine Darstellung der gesamten Lösungsmenge $L(A, b)$ von $Ax = b$.

(25) (a) Verwandeln Sie jede der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix in Stufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 16 & 9 & 4 & 1 \\ 64 & 27 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie mittels dieser Stufenformen für jede der Matrizen A, B, C

- den *Rang* r der Matrix
- wenigstens ein r-tupel von Spalten der Matrix, welches eine $\mathbb{Q}$-*Basis des Spaltenraumes* dieser Matrix bildet.

(26) A, B, C seien die Matrizen aus der vorigen Aufgabe.
Finden Sie mittels der in Aufgabe (25) berechneten Stufenformen und mittels der Methode aus Kapitel 2 der Vorlesung

- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(A,0) \leq \mathbb{Q}^{3\times 1}$ des homogenen Systems $Ax=0$
- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(B,0) \leq \mathbb{Q}^{4\times 1}$ des homogenen Systems $Bx=0$
- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(C,0) \leq \mathbb{Q}^{5\times 1}$ des homogenen Systems $Cx=0$.

Wie sehen diese Gleichungssysteme aus, wenn man sie *ohne Verwendung von Matrizen* anschreibt?

(27) (a) A sei die Matrix aus Aufgabe (25) und $b, c, d \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ seien die Spalten

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie mittels der Ergebnisse aus Aufgabe (26) und mittels der Methode aus Kapitel 2 der Vorlesung Darstellungen der Lösungsmengen $L(A,b)$, $L(A,c)$, $L(A,d)$ der inhomogenen Gleichungssysteme $Ax = b$, $Ax = c$, $Ax = d$.
Für welche der drei Spalten b, c, d ist die zugehörige Lösungsmenge *nicht leer*?

(b) Für die Zeilen A_{1-}, A_{2-}, A_{3-} der Matrix A gilt $A_{1-} - 2 \cdot A_{2-} + A_{3-} = (0\ \ 0\ \ 0)$.
Zeigen Sie, daß daraus für jede Spalte $u \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ folgt:

$$L(A,u) \neq \emptyset \iff u_1 - 2 \cdot u_2 + u_3 = 0\,.$$

(28) Testen Sie, ob die Matrix $M \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ *invertierbar* ist und finden Sie gegebenenfalls die zu M *inverse Matrix* $M^{-1} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$! Dabei sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$