Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 2

27. bis 29. Oktober 2009

(13) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*:
(a) $2n+1 < 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$
(b) $n^2 < 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.
Was gilt in (a) für $n = 0, 1, 2$ und in (b) für $n = 0, 1, 2, 3, 4$?

(14) Ordnen Sie die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach:
5/11, 6/11, 6/13, 7/13, 8/17, 11/23.

(15) (a) Schreiben Sie die Summen

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

ohne Verwendung des Summenzeichens an!

(b) Zeigen Sie, daß für alle $k \geq 1$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

gilt.

(c) Berechnen Sie mittels (b) die beiden Summen aus (a)!

(d) Berechnen Sie für ein *beliebiges* $n \geq 1$ die Summen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\ .$$

(16) Schreiben Sie die folgenden Summen ohne Verwendung des Summenzeichens an und berechnen Sie diese Summen:

(a) $$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{2}(2i)(2j+1)$$ (b) $$\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=1}^{4}(2i)(2j+1)$$

(c) $$\sum_{(i,j)\in\{1,2,3,4\}\times\{0,1,2\}}(2i)(2j+1)$$ (d) $$\left(\sum_{i=1}^{4} 2i\right)\left(\sum_{j=0}^{2}(2j+1)\right)\ .$$

(17) Es sei

$$A = (A_{ij})_{1\le i,j\le 5} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{51} & \dots & A_{55} \end{pmatrix}$$

eine 5×5-Matrix mit Elementen in einem Körper K.

Überlegen Sie, welche Elemente der Matrix A in den folgenden Ausdrücken summiert werden:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} A_{ij}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5} A_{ij}$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} A_{ii}$ (d) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le 5} A_{ij}$

(e) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\{1,3,5\}\times\{2,4\}} A_{ij}$ (f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i}^{5} A_{ij}$ (g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{j} A_{ij}$ (h) $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le 5} A_{ij}$

(i) $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le 5} A_{ij}$ (j) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{5} A_{ij}$ (k) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{j-1} A_{ij}$ (l) $\displaystyle\sum_{1\le i=j\le 5} A_{ij}$.

(18) $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le 5}$ sei die Matrix aus Aufgabe (17).

Stellen Sie mit Hilfe des Summenzeichens die Summen folgender Elemente der Matrix A dar:

- aller Elemente der Matrix in der zweiten Zeile
- aller Elemente der Matrix in der dritten Spalte
- aller Elemente der Matrix außerhalb der Diagonale
- aller Elemente der Matrix in und unterhalb der Diagonale
- aller Elemente der Matrix unterhalb der Diagonale *ohne* die Elemente in der Diagonale.

(19) (a) Welche der folgenden Matrizen A, B, C, D, E, F mit Elementen aus $\mathbb{Q}$ können miteinander multipliziert werden – und in welcher Reihenfolge?

(b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen A, B, C, D, E, F!

Dabei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2 & 4/3 \\ 4 & -8/3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(20) A, P, Q, R seien die folgenden Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen PA, AP, QA, AQ, RA, AR und vergleichen Sie jede dieser Matrizen mit der ursprünglichen Matrix A!

Wie nennt man Matrizen vom Typ der Matrix P resp. Q resp. R?