Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 1

13. bis 15. Oktober 2009

(1) Welche der folgenden Mengen sind gleich:
$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{4, 1, 3, 2\}$
$C = \{3, 1, 1, 2\}$
$D = \{3, 1\}$
$E = \{3, 2, 1\}$
$F = \{1, 3, 3, 1, 1\}$?

(2) Welche Teilmengenbeziehungen bestehen zwischen den folgenden Mengen:
$A = \emptyset$
$B = \{1, 3, 1\}$
$C = \{4, 1, 2, 3\}$
$D = \{2, 1, 3, 1, 1\}$
$E = \{3, 4, 4, 3\}$?

(3) Gelten für beliebige Mengen A, B, C folgende Aussagen:
- $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$?

(4) Stellen Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form dar:
$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -5 < x \leq 3\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ Primzahl und } x \leq 15\}$.

(5) Kann man die folgenden Mengen in aufzählender Form darstellen:
$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ungerade}\}$
$B = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$?

(6) Berechnen Sie für die Mengen A, B, C die Mengen
- $A \cap (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cup C$
- $(A \cup B) \setminus C$
- $A \cup (B \setminus C)$.

Dabei sei
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 4, 5, 7\}$
$C = \{3, 4, 8, 9\}$.

(7) Es sei f die Funktion $x \mapsto 2x - 1$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.

- Skizzieren Sie die Mengen
$P := \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -4 \leq x \leq 4\} \times \{y \in \mathbb{Z} \,|\, -10 \leq y \leq 10\}$ und $P \cap \operatorname{Graph}(f)$.
- Sind die Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(x) := x^2 - (x-1)^2$ gleich?

(8) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmten Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Z}$ mit
- $a = bm + r$
- $0 \leq r < |b|$:

$a = +18$ und $b = +7$
$a = +18$ und $b = -7$
$a = -18$ und $b = +7$
$a = -18$ und $b = -7$
$a = +465$ und $b = +11$
$a = +465$ und $b = -11$
$a = -465$ und $b = +11$
$a = -465$ und $b = -11$.

(9) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ seien $f(a) \in \mathbb{Z}$ und $g(a) \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmten Zahlen mit $a = 3f(a) + g(a)$ und $0 \leq g(a) < 3$. Außerdem sei $h(a) = (f(a), g(a))$.

- Berechnen Sie für die Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ und $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Funktionswerte $f(a)$, $g(a)$ und $h(a)$ für $-18 < a < +18$.
- Bestimmen Sie die Urbilder von $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ bezüglich f.
- Bestimmen Sie die Urbilder von $0, 1, 2$ bezüglich g.
- Bestimmen Sie die Urbilder aller (m, r) mit $-6 < m < +6$ und $0 \leq r < 3$ bezüglich der Funktion h.

(10) Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ die *Zifferndarstellung von a zur Basis b*, also die eindeutig bestimmten Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $z_0, z_1, \ldots z_n \in \mathbb{N}$ mit
- $a = z_0 b^0 + z_1 b^1 + \ldots + z_n b^n$
- $0 \leq z_0, z_1, \ldots, z_n < b$
- $z_n \neq 0$:

$a = 6317$ und $b = 2$
$a = 6317$ und $b = 5$
$a = 6317$ und $b = 7$
$a = 6317$ und $b = 10$
$a = 6317$ und $b = 12$
$a = 6317$ und $b = 16$.

(11) Für jede ganze Zahl a mit $-2^{31} \leq a < 2^{31}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes 32-tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{30}, a_{31}) \in \{0,1\}^{32}$ mit $a = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_{29} 2^{29} + a_{30} 2^{30} - a_{31} 2^{31}$. Man nennt den Ausdruck $a_{31} a_{30} a_{29} \ldots a_1 a_0$ die *Zweierkomplementdarstellung* von a.

- Zeigen Sie, daß für jedes 32-tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{30}, a_{31}) \in \{0,1\}^{32}$ die Beziehung $a_{31} a_{30} a_{29} \ldots a_1 a_0 + \bar{a}_{31} \bar{a}_{30} \bar{a}_{29} \ldots \bar{a}_1 \bar{a}_0 = -1$ gilt. Dabei sei $\bar{0} := 1$ und $\bar{1} := 0$.

- Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen a die Zweierkomplementdarstellung:
$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$, $a = 12$, $a = -12$, $a = 13$, $a = -13$, $a = 6317$, $a = -6317$, $a = 2^{31} - 1$, $a = -2^{31}$.

(12) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*, daß für jede Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 1$ und jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ die *Summenformel für endliche geometrische Reihen* gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Was bedeutet das für $q = 2$?