Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 1 – Lösungen

13. bis 15. Oktober 2009

(1) Lösung von Aufgabe (1):

$A = C = E = \{1, 2, 3\}$
$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = F = \{1, 3\}$

(2) Lösung von Aufgabe (2):

Es ist

$A = \emptyset\,, \quad B = \{1, 3\}\,, \quad C = \{1, 2, 3, 4\}\,, \quad D = \{1, 2, 3\}\,, \quad E = \{3, 4\}.$

Daraus folgt

- $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C$
- $A \subseteq E \subseteq C\,.$

Um daraus *alle* Teilmengenbeziehungen zwischen A, B, C, D, E abzuleiten, benützt man die Regeln

- $X \subseteq X$
- $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$,

die für alle Mengen X, Y, Z gelten.

Es gilt also auch $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$, $E \subseteq E$, $A \subseteq D$, $B \subseteq C$, $A \subseteq C$.

(3) Lösung von Aufgabe (3):

Die Aussage »$A \subseteq B$ und $B \subseteq C$« bedeutet:
Jedes Element der Menge A ist ein Element der Menge B und *jedes Element der Menge B ist ein Element der Menge C.*
Daraus folgt:
Jedes Element der Menge A ist ein Element der Menge C.
Letzteres bedeutet $A \subseteq C$.
Also ist die erste Aussage wahr.

Die Aussage »$A \subseteq B$ und $B \subseteq A$« bedeutet:
Jedes Element der Menge A ist ein Element der Menge B und *jedes Element der Menge B ist ein Element der Menge A.*
Daraus folgt:
Die Mengen A und B haben dieselben Elemente.
Letzteres bedeutet $A = B$.
Also ist auch die zweite Aussage wahr.

(4) Lösung von Aufgabe (4):

$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
Bemerkung: 1 ist *per definitionem* keine Primzahl!

(5) Lösung von Aufgabe (5):

Bei der Darstellung einer Menge *in aufzählender Form* müssen *alle* Elemente dieser Menge angeschrieben werden. Deshalb ist die Darstellung einer *unendlichen* Menge in aufzählender Form nicht möglich.
Die Mengen A und B sind unendlich und können somit nicht in aufzählender Form dargestellt werden.
Bemerkung:
Die Schreibweise $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ ist *keine* Darstellung der Menge $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ungerade}\}$ in aufzählender Form!

(6) Lösung von Aufgabe (6):

- $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4\} = \{4\}$
- $(A \cap B) \cap C = \{2, 4\} \cap \{3, 4, 8, 9\} = \{4\}$
- $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 4\}$
- $(A \cap B) \cup C = \{2, 4\} \cup \{3, 4, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 8, 9\}$
- $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \setminus \{3, 4, 8, 9\} = \{1, 2, 5, 7\}$
- $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

(7) Lösung von Aufgabe (7):

P ist die Menge der $9 \times 21 = 189$ Punkte

$$\begin{array}{ccccccc}
(-4,-10) & (-4,-9) & \ldots & (-4,0) & \ldots & (-4,+9) & (-4,+10) \\
(-3,-10) & (-3,-9) & \ldots & (-3,0) & \ldots & (-3,+9) & (-3,+10) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(0,-10) & (0,-9) & \ldots & (0,0) & \ldots & (0,+9) & (0,+10) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(+3,-10) & (+3,-9) & \ldots & (+3,0) & \ldots & (+3,+9) & (+3,+10) \\
(+4,-10) & (+4,-9) & \ldots & (+4,0) & \ldots & (+4,+9) & (+4,+10)
\end{array}$$

und $P \cap \operatorname{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -4 \leq x \leq +4\}$ ist die Menge der 9 Punkte

$(-4,-9), (-3,-7), (-2,-5), (-1,-3), (0,-1), (+1,+1), (+2,+3), (+3,+5), (+4,+7)$.

Die Darstellung dieser Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist klar.

Für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = x^2 - (x-1)^2 = x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 1$.
Also ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Da f und g Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ sind, gilt nach Definition der Gleichheit von Funktionen somit $f = g$.

(8) Lösung von Aufgabe (8):

$+18 = (+7)(+2) + 4$
$+18 = (-7)(-2) + 4$
$-18 = (+7)(-3) + 3$
$-18 = (-7)(+3) + 3$

$$+465 = (+11)(+42) + 3$$
$$+465 = (-11)(-42) + 3$$
$$-465 = (+11)(-43) + 8$$
$$-465 = (-11)(+43) + 8$$

(9) Lösung von Aufgabe (9):

Es gilt

$$\begin{array}{rcl}
-18 = 3\cdot(-6)+0 & \qquad & 0 = 3\cdot 0+0 \\
-17 = 3\cdot(-6)+1 & & 1 = 3\cdot 0+1 \\
-16 = 3\cdot(-6)+2 & & 2 = 3\cdot 0+2 \\
-15 = 3\cdot(-5)+0 & & 3 = 3\cdot 1+0 \\
-14 = 3\cdot(-5)+1 & & 4 = 3\cdot 1+1 \\
-13 = 3\cdot(-5)+2 & & 5 = 3\cdot 1+2 \\
-12 = 3\cdot(-4)+0 & & 6 = 3\cdot 2+0 \\
-11 = 3\cdot(-4)+1 & & 7 = 3\cdot 2+1 \\
-10 = 3\cdot(-4)+2 & & 8 = 3\cdot 2+2 \\
-\ \ 9 = 3\cdot(-3)+0 & & 9 = 3\cdot 3+0 \\
-\ \ 8 = 3\cdot(-3)+1 & & 10 = 3\cdot 3+1 \\
-\ \ 7 = 3\cdot(-3)+2 & & 11 = 3\cdot 3+2 \\
-\ \ 6 = 3\cdot(-2)+0 & & 12 = 3\cdot 4+0 \\
-\ \ 5 = 3\cdot(-2)+1 & & 13 = 3\cdot 4+1 \\
-\ \ 4 = 3\cdot(-2)+2 & & 14 = 3\cdot 4+2 \\
-\ \ 3 = 3\cdot(-1)+0 & & 15 = 3\cdot 5+0 \\
-\ \ 2 = 3\cdot(-1)+1 & & 16 = 3\cdot 5+1 \\
-\ \ 1 = 3\cdot(-1)+2 & & 17 = 3\cdot 5+2\,.
\end{array}$$

Also ist

$$f(-18) = f(-17) = f(-16) = -6$$
$$f(-15) = f(-14) = f(-13) = -5$$
$$f(-12) = f(-11) = f(-10) = -4 \quad \text{u.s.w.}$$

$$g(-18) = g(-15) = g(-12) = \ldots = 0$$
$$g(-17) = g(-14) = g(-11) = \ldots = 1$$
$$g(-16) = g(-13) = g(-10) = \ldots = 2$$

$$h(-18) = (-6, 0)$$
$$h(-17) = (-6, 1)$$
$$h(-16) = (-6, 2)$$
$$h(-15) = (-5, 0)$$
$$h(-14) = (-5, 1)$$
$$h(-13) = (-5, 2) \quad \text{u.s.w.}$$

$$f^{-1}(-6) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -6\} = \{-18, -17, -16\}$$
$$f^{-1}(-5) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -5\} = \{-15, -14, -13\}$$
$$f^{-1}(-4) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -4\} = \{-12, -11, -10\}$$
$$f^{-1}(-3) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -3\} = \{-9, -8, -7\}$$
$$f^{-1}(-2) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -2\} = \{-6, -5, -4\}$$
$$f^{-1}(-1) = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = -1\} = \{-3, -2, -1\}$$
$$f^{-1}(0) \quad = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = 0\} \quad = \{0, 1, 2\}$$

$f^{-1}(+1) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = +1\} = \{3, 4, 5\}$
$f^{-1}(+2) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = +2\} = \{6, 7, 8\}$
$f^{-1}(+3) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = +3\} = \{9, 10, 11\}$
$f^{-1}(+4) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = +4\} = \{12, 13, 14\}$
$f^{-1}(+5) = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = +5\} = \{15, 16, 17\}$

$g^{-1}(0) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) = 0\} =$
$\quad = \{\ldots, -18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, +3, +6, +9, +12, +15, \ldots\}$

$g^{-1}(1) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) = 1\} =$
$\quad = \{\ldots, -17, -14, -11, -8, -5, -2, +1, +4, +7, +10, +13, +16, \ldots\}$

$g^{-1}(2) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) = 2\} =$
$\quad = \{\ldots, -16, -13, -10, -7, -4, -1, +2, +5, +8, +11, +14, +17, \ldots\}$.

Allgemein ist $f^{-1}(m) = \{3m, 3m+1, 3m+2\}$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ sowie
$g^{-1}(0) = \{3i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $g^{-1}(1) = \{3i+1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $g^{-1}(2) = \{3i+2 \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $h(a) = (f(a), g(a)) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$.
Andererseits hat für jedes $(m, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$ die Menge
$h^{-1}((m, r)) = \{a \in \mathbb{Z} \mid h(a) = (m, r)\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = m \text{ und } g(a) = r\}$
genau ein Element.
Es gilt zum Beispiel $h^{-1}((-6, 0)) = \{-18\}$ und $h^{-1}((5, 2)) = \{17\}$.
Das bedeutet, daß h eine *bijektive Abbildung* von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$ ist.

(10) Lösung von Aufgabe (10):

$6317 = (1100010101101)_2$
Probe:
$1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 4096 + 2048 + 128 + 32 + 8 + 4 + 1 = 6317$

$6317 = (200232)_5$
Probe:
$2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 3125 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 =$
$= 6250 + 50 + 15 + 2 = 6317$

$6317 = (24263)_7$
Probe:
$2 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 2 \cdot 2401 + 4 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 1 =$
$= 4802 + 1372 + 98 + 42 + 3 = 6317$

$6317 = (6317)_{10}$
Probe (nur wegen der Analogie zu den anderen Darstellungen):
$6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 6000 + 300 + 10 + 7 = 6317$

$6317 = (37A5)_{12}$, wobei wie üblich A = 10 sei
Probe:
$3 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0 = 3 \cdot 1728 + 7 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 5 \cdot 1 =$
$= 5184 + 1008 + 120 + 5 = 6317$

$6317 = (18AD)_{16}$, wobei A = 10 und D = 13 sei
Probe:
$1 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 1 \cdot 4096 + 8 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 13 \cdot 1 =$
$= 4096 + 2048 + 160 + 13 = 6317$

Zwischen der Zifferndarstellung von 6317 zur Basis 2 und zur Basis 16 besteht ein Zusammenhang:
Es gilt einerseits
$6317 = (1100010101101)_2 = (0001\,1000\,1010\,1101)_2 = (18\mathrm{AD})_{16}$.
und andererseits
$(0001)_2 = 1 = (1)_{16}$
$(1000)_2 = 8 = (8)_{16}$
$(1010)_2 = 10 = (\mathrm{A})_{16}$
$(1101)_2 = 13 = (\mathrm{D})_{16}$.

(11) Lösung von Aufgabe (11):

Es ist $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$ und $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$.

Daher gilt für jedes 32-tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{30}, a_{31}) \in \{0, 1\}^{32}$ die Beziehung

$a_{31}a_{30}\ldots a_1a_0 + \bar{a}_{31}\bar{a}_{30}\ldots\bar{a}_1\bar{a}_0 =$
$= (a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_{30} 2^{30} - a_{31} 2^{31}) + (\bar{a}_0 2^0 + \bar{a}_1 2^1 + \ldots + \bar{a}_{30} 2^{30} - \bar{a}_{31} 2^{31}) =$
$= (a_0 + \bar{a}_0)2^0 + (a_1 + \bar{a}_1)2^1 + \ldots + (a_{30} + \bar{a}_{30})2^{30} - (a_{31} + \bar{a}_{31})2^{31} =$
$= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{30}) - 2^{31} = (2^{31} - 1) - 2^{31} = -1\,.$

Dieses Resultat kann man zur Berechnung der Zweierkomplementdarstellung negativer Zahlen verwenden:

Es gilt

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 $= 0$
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0001 $= 1$
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1011 $= 11$
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1100 $= 12$
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1101 $= 13$
0000 0000 0000 0000 0001 1000 1010 1100 $= 6316$
0000 0000 0000 0000 0001 1000 1010 1101 $= 6317$
0111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 $= 2^{31} - 1\,.$

Daraus folgt

1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 $= -1$
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110 $= -2$
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 0100 $= -12$
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 0011 $= -13$
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 0010 $= -14$
1111 1111 1111 1111 1110 0111 0101 0011 $= -6317$
1111 1111 1111 1111 1110 0111 0101 0010 $= -6318$
1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 $= -2^{31}\,.$

(12) Lösung von Aufgabe (12):

Die Aussage

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

wird für beliebiges $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ durch Induktion über n für alle $n \geq 0$ gezeigt.

Induktionsanfang:
Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k \;=\; q^0 \;=\; 1 \;=\; \frac{q-1}{q-1} \;=\; \frac{q^1-1}{q-1} \;=\; \frac{q^{0+1}-1}{q-1}\,.$$

Induktionsschluß:
Es sei n eine beliebige Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt, das heißt es sei

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

Dann ist auch $n+1$ eine Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt.
Aus der Annahme über die Zahl n folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\
&= \frac{(q^{n+1}-1) + q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

- Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$.
- Ist $n \geq 0$ und gilt die Aussage $(*)$ für n, so gilt sie auch für $n+1$.

Also gilt die Aussage $(*)$ für *alle* natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Für $q = 2$ lautet die Aussage $(*)$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \;=\; 2^{n+1}-1 \quad \text{für alle } n \geq 0\,.$$

Diese Aussage haben wir in Aufgabe (11) für $n = 30$ verwendet.