Unterlagen zur Vorlesung
Algebra und Geometrie in der Schule: Grundwissen über Lineare Gleichungen

Sommersemester 2011

Franz Pauer

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT INNSBRUCK,
TECHNIKERSTRASSE 25, 6020 INNSBRUCK, AUSTRIA

KAPITEL 4

Systeme linearer Gleichungen

In diesem Kapitel werden mit m,n,p,q immer positive ganze Zahlen und mit K ein Körper (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) bezeichnet.

§1. Matrizen

Definition 1 : Eine *$m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K* (oder eine *$m \times n$-Matrix über K*) ist eine Funktion

$$A : \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to K\,,\ (i,j) \mapsto A(i,j)\,.$$

Statt $A(i,j)$ schreiben wir kurz A_{ij}. Eine Matrix wird üblicherweise als Familie

$$A = (A_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

geschrieben. A_{ij} heißt der ij-te *Koeffizient* von A (oder *Koeffizient* in der i-ten *Zeile* und j-ten *Spalte* von A). Als Kurzschreibweise wird

$$A = (A_{ij})_{i,j}$$

verwendet. Anstelle von „Matrix-Koeffizienten“ spricht man auch von „Matrix-Einträgen“. Eine $m \times 1$-Matrix heißt eine *m-Spalte*,
eine $1 \times n$-Matrix eine *n-Zeile*. Die n-Zeile

$$A_{i-} := (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})$$

heißt i-te *Zeile* von A, die m-Spalte

$$A_{-j} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$$

j-te *Spalte* von A. Die Zahl i bzw. j heißt *Zeilenindex* bzw. *Spaltenindex* des Matrix-Eintrages A_{ij}.
Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K wird mit

$$K^{m\times n}$$

bezeichnet. Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ werden kurz *ganzzahlige* oder *rationale* Matrizen genannt.

1×1-Matrizen mit Koeffizienten in K werden üblicherweise mit den entsprechenden Elementen von K identifiziert, d.h.

$$K^{1\times 1} = K \quad , \quad (A_{ij})_{\substack{1\le i\le 1\\ 1\le j\le 1}} = A_{11}\,.$$

$1 \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K werden üblicherweise mit den entsprechenden n-Tupeln in K^n identifiziert, d.h. die Funktionen

$$A : \{1\}\times\{1,\ldots,n\} \longrightarrow K,\ (1,i) \longmapsto A(1,i)\,,$$

und

$$\{1,\ldots,n\} \longrightarrow K,\ i \longmapsto A(1,i)\,,$$

werden als gleich aufgefasst, obwohl ihre Definitionsbereiche ($\{1\}\times\{1,\ldots,n\}$ und $\{1,\ldots,n\}$) nicht gleich sind.

Definition 2 : Seien $A,B \in K^{m\times n}$ und $r,s \in K$. Dann heißt

$$A+B := (A_{ij}+B_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \ldots & A_{1n}+B_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m1}+B_{m1} & \ldots & A_{mn}+B_{mn}\end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

die *Summe* von A und B, und

$$r\cdot A := (rA_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} rA_{11} & \ldots & rA_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ rA_{m1} & \ldots & rA_{mn}\end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

heißt das *r-fache von A*. Wir schreiben im Folgenden statt „$r\cdot A$“ kurz „rA“. Weiters vereinbaren wir, dass $rA+sB$ immer $(rA)+(sB)$ bedeutet (d.h. rA und sB sind zuerst zu berechnen, dann die Summe von rA und sB).

Satz 1 :

(1) *$(K^{m\times n},+)$ ist eine kommutative Gruppe, wobei das neutrale Element die $m\times n$*-Nullmatrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0_K & \ldots & 0_K\\ \vdots & & \vdots\\ 0_K & \ldots & 0_K\end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

und das zu $A \in K^{m\times n}$ inverse Element

$$-A = (-A_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$$

ist.

(2) *Für $r,s \in K$ und $A,B \in K^{m\times n}$ ist*

$$(r+s)A = rA+sA$$

und

$$r(A+B) = rA + rB.$$

(3) *Für $r,s \in K$ und $A \in K^{m\times n}$ ist*

$$(rs)A = r(sA) \ \ \text{und} \ \ 1_K A = A\,.$$

Beweis: (1) Wir zeigen nur die Assoziativität, die anderen Eigenschaften einer Gruppe werden analog bewiesen. Für $A,B,C \in K^{m\times n}$ ist
$(A+B)+C = (A_{ij}+B_{ij})_{i,j} + (C_{i,j})_{i,j} = ((A_{ij}+B_{ij})+C_{ij})_{i,j} =$
$= (A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij}))_{i,j} = (A_{ij})_{i,j} + (B_{ij}+C_{ij})_{i,j} = A+(B+C)$
aufgrund des Assoziativgesetzes für die Addition in K.
(2), (3) Übung.

Definition 3 : Für eine n-Zeile A und eine n-Spalte B heißt

$$A\cdot B := (A_1,\ldots,A_n)\cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} := A_1B_1 + \cdots + A_nB_n = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i$$

das *Produkt* von A und B (sprich „A mal B“). Oft wird statt $A\cdot B$ nur AB geschrieben.

Beispiel 1 : Ein Korb voller Waren werde durch die Zeile

$$S := (S_1,\ldots,S_n) \in \mathbb{Q}^{1\times n}$$

beschrieben, wobei S_i die Stückzahl der Ware i im Korb angibt. Sei

$$P := \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n\times 1},$$

wobei P_i den Preis der Ware i in Euro angibt. Dann ist

$$SP = \sum_{i=1}^{n} S_iP_i \in \mathbb{Q}$$

der Gesamtpreis (in Euro) für die Waren im Korb.

Definition 4 : Für $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ heißt

$$A\cdot B := (A_{i-}\cdot B_{-j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}} := (\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}} \in K^{m\times p}$$

das *Produkt* von A und B (sprich „A mal B“). Oft wird statt $A\cdot B$ nur AB geschrieben. Zur Berechnung des Koeffizienten

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

werden die Koeffizienten in der i-ten Zeile von A der Reihe nach mit den entsprechenden Koeffizienten in der j-ten Spalte von B multipliziert und anschließend alle diese Produkte addiert.

Im Spezialfall $m = 1$ und $p = 1$, d.h. A ist eine n-Zeile und B eine n-Spalte, stimmen die Definitionen 3 und 4 überein.

Beispiel 2 : Die Waren $1,\dots,m$ werden aus Rohstoffen $1,\dots,n$ hergestellt, die von Lieferanten $1,\dots,p$ bezogen werden. Für die Erzeugung der Ware i werden Q_{ij} Einheiten des Rohstoffes j benötigt. Der Preis einer Einheit des Rohstoffes j beim Lieferanten k beträgt P_{jk}. Setzt man
$Q := (Q_{ij})_{i,j} \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $P := (P_{jk})_{j,k} \in \mathbb{Q}^{n\times p}$, dann ist

$$(QP)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}P_{jk}$$

der Gesamtpreis der Rohstoffe für Ware i beim Lieferanten k. Sollen jeweils S_i Stück der Ware i produziert werden und setzt man
$S = (S_1,\dots,S_m) \in \mathbb{Q}^{1\times n}$, dann ist $(SQ)_{1j}$ die Anzahl der insgesamt benötigten Einheiten von Rohstoff j und

$$((SQ)P)_{1k}$$

ist der Preis bei Lieferant k für alle benötigten Rohstoffe.

Satz 2 : *Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. für Matrizen $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$ und $C \in K^{p\times q}$ gilt*

$$(AB)C = A(BC).$$

Beweis: Da AB eine $m\times p$-Matrix und BC eine $n\times q$-Matrix ist, sind sowohl $(AB)C$ als auch $A(BC)$ $m\times q$-Matrizen. Für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le q$ ist

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}B_{\ell k} \right) C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{\ell k}C_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}(BC)_{\ell j} \\
&= (A(BC))_{ij}\ .
\end{aligned}$$

Definition 5 : Für Elemente i, j einer beliebigen Indexmenge ist das *Kronecker-Delta* in K

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1_K & \text{falls } i = j \text{ ist,} \\ 0_K & \text{falls } i \neq j \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Matrix

$$I_n := (\delta_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

heißt $n \times n$*-Einheitsmatrix*.

Satz 3 : *Für eine beliebige Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist*

$$I_m A = A \quad \textit{und} \quad AI_n = A\,.$$

Beweis: Für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ ist $(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij}$, also $I_m A = A$. Analog beweist man $AI_n = A$.

Satz 4 : *Für $A, B \in K^{m\times n}$ und $C \in K^{n\times p}$ gilt*

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Für $A \in K^{m\times n}$ und $B,C \in K^{n\times p}$ gilt

$$A(B +C) = AB + AC.$$

Für $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$ und $r \in K$ gilt

$$r(AB) = (rA)B = A(rB).$$

Beweis: Übung.

Satz 5 : *$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement I_n. Wegen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $K^{n\times n}$ im Allgemeinen nicht kommutativ.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1, Satz 2, Satz 3 und Satz 4.

Definition 6 : Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt mit

$$AB = I_n \quad \text{und} \quad BA = I_n\,.$$

In diesem Fall nennt man B die zu A *inverse* Matrix und schreibt

$$B = A^{-1}.$$

Sei

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}.$$

$(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ ist eine Gruppe, sie heißt *allgemeine lineare Gruppe* (auf Englisch „general linear group“).

§2. Elementare Umformungen

Definition 7 : Seien $1 \le k \le m$ und $1 \le \ell \le n$. Dann heißt die Matrix $E_{k\ell} \in K^{m\times n}$ mit Koeffizienten

$$(E_{k\ell})_{ij} := \delta_{ik}\delta_{j\ell} = \begin{cases} 1_K & \text{falls } i = k \text{ und } j = \ell \text{ ist,} \\ 0_K & \text{falls } i \neq k \text{ oder } j \neq \ell \text{ ist,} \end{cases}$$

eine *Standard-Matrix* von $K^{m\times n}$. Zum Beispiel sind die Standard-Matrizen von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Spezialfall $m = 1$ (oder $n = 1$) schreibt man statt $E_{1\ell}$ (bzw. E_{k1}) kurz e_ℓ (bzw. e_k). Zum Beispiel sind die Standard-Zeilen von $\mathbb{Q}^{1\times 3}$

$$e_1 = (1,0,0)\,,\ e_2 = (0,1,0) \text{ und } e_3 = (0,0,1)$$

und die Standard-Spalten von $\mathbb{Q}^{2\times 1}$ sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 6 : *Für $E_{k\ell} \in K^{m\times m}$, $A \in K^{m\times n}$ und $1 \le i \le m$ ist*

$$(E_{k\ell}A)_{i-} = \begin{cases} A_{\ell-} & \textit{falls } i = k \textit{ ist,} \\ 0 & \textit{falls } i \neq k \textit{ ist} \end{cases}.$$

Beweis: Sei $1 \le j \le n$. Dann ist

$$(E_{k\ell}A)_{ij} = \sum_{p=1}^{m} (E_{k\ell})_{ip}A_{pj} = \sum_{p=1}^{m} \delta_{ki}\delta_{\ell p}A_{pj} =$$

$$= \delta_{ki}A_{\ell j} = \begin{cases} A_{\ell j} & \text{falls } i = k \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } i \neq k \text{ ist} \end{cases}.$$

Definition 8 : Die folgenden Matrizen heißen *Elementarmatrizen* in $K^{n\times n}$:

Typ 1: $I_n + rE_{k\ell}$, wobei $r \in K$ und $k \neq \ell$ ist,
Typ 2: $I_n - E_{kk} - E_{\ell\ell} + E_{k\ell} + E_{\ell k}$, wobei $k \neq \ell$ ist,
Typ 3: $I_n + (t-1)E_{kk}$, wobei $t \in K$ invertierbar ist.

Zum Beispiel sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$$

Elementarmatrizen vom Typ 1, Typ 2 bzw. Typ 3.

Satz 7 : *Sei $A \in K^{m\times n}$ und seien $P \in K^{m\times m}$ sowie $Q \in K^{n\times n}$ Elementarmatrizen. Dann erhält man PA aus A, indem man*

Typ 1: *zur k-ten Zeile von A das r-fache der ℓ-ten Zeile addiert,*
Typ 2: *die k-te und ℓ-te Zeile von A vertauscht,*
Typ 3: *die k-te Zeile von A mit t multipliziert.*

Diese Umformungen der Matrix A heißen elementare Zeilenumformungen. *Analog erhält man AQ aus A, indem man*

Typ 1: *zur ℓ-ten Spalte von A das r-fache der k-ten Spalte addiert,*
Typ 2: *die k-te und ℓ-te Spalte von A vertauscht,*
Typ 3: *die k-te Spalte von A mit t multipliziert.*

Diese Umformungen der Matrix A heißen elementare Spaltenumformungen.

Beweis: Für $P = I_n + rE_{k\ell}$, wobei $r \in K$ und $k \neq \ell$, ist
$PA = (I_n + rE_{k\ell})A = A + rE_{k\ell}A$. Nach Satz 6 ist

$$(rE_{k\ell}A)_{i-} = \begin{cases} rA_{\ell-} & \text{falls } i = k \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } i \neq k \text{ ist.} \end{cases}$$

Die anderen Fälle beweist man analog.

Wenn eine elementare Zeilenumformung von $A \in K^{m\times n}$ durchgeführt wird, entspricht das der Multiplikation (von links) einer gewissen Elementarmatrix $P \in K^{m\times m}$ mit A. Wegen $P \cdot I_m = P$ erhält man diese Elementarmatrix, indem man diese elementare Umformung an der Einheitsmatrix I_m durchführt. Zum Beispiel ist die Elementarmatrix in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, die der elementaren Umformung „addiere zur ersten Zeile einer Matrix deren 4-fache zweite Zeile“ entspricht, jene Matrix, die man erhält, indem man zur ersten Zeile der Einheitsmatrix in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ihre 4-fache zweite Zeile addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Satz 8: *Elementarmatrizen sind invertierbar, genauer gilt:*

Typ 1: $(I_n + rE_{k\ell})^{-1} = I_n - rE_{k\ell}$
Typ 2: $(I_n - E_{kk} - E_{\ell\ell} + E_{k\ell} + E_{\ell k})^{-1} = I_n - E_{kk} - E_{\ell\ell} + E_{k\ell} + E_{\ell k}$
Typ 3: $(I_n + (t-1)E_{kk})^{-1} = I_n + (t^{-1}-1)E_{kk}\,.$

Somit können alle elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen einer beliebigen Matrix durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen wieder rückgängig gemacht werden.

Beweis: Die Matrix

$$(I_n - rE_{k\ell})(I_n + rE_{k\ell}) = (I_n - rE_{k\ell})[(I_n + rE_{k\ell})I_n]$$

erhält man aus I_n, indem man zuerst zur k-ten Zeile das r-fache der ℓ-ten Zeile addiert und anschließend das r-fache der ℓ-ten Zeile subtrahiert. Daher ist

$$(I_n - rE_{k\ell})(I_n + rE_{k\ell}) = I_n.$$

Die anderen Fälle beweist man analog. Ist P eine Elementarmatrix, so bekommt man A aus $B := PA$ wieder zurück, indem man B von links mit P^{-1} multipliziert.

§3. Systeme linearer Gleichungen

Definition 9: Ein *System linearer Gleichungen mit Koeffizienten in K* ist eine Aufgabe:

- Gegeben sind eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ und eine Spalte $b \in K^{m\times 1}$.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge

  $$L(A,b) := \{x \mid x \in K^{n\times 1} \text{ mit } Ax = b\}$$

  aller n-Spalten x (mit Koeffizienten in K), für die $Ax = b$ ist.

Die Menge $L(A,b)$ heißt *Lösungsmenge* des durch A und b gegebenen Systems linearer Gleichungen. Ihre Elemente heißen *Lösungen* dieses Systems.

Das durch A und b gegebene System linearer Gleichungen heißt *homogen*, wenn b die Nullspalte ist, ansonsten *inhomogen*.

Ohne Matrizen kann man das so formulieren: Gegeben sind Elemente $A_{ij} \in K$ und $b_i \in K$ für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$. Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge aller n-Tupel $(x_1,\dots,x_n)$ mit Komponenten in K, für die

$$\begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n & = & b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ist.

Das durch $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$ gegebene System linearer Gleichungen wird kurz mit „(A,b)“ oder „$Ax = b$“ bezeichnet. Die Zahl m heißt die *Anzahl der Gleichungen*, die Zahl n die *Anzahl der Unbekannten*.

Wenn 0_n bzw. 0_m die Nullspalte in $K^{n\times 1}$ bzw. $K^{m\times 1}$ ist, dann ist $A0_n = 0_m$, also hat ein homogenes System linearer Gleichungen immer mindestens eine Lösung, nämlich die Nullspalte. Hingegen gibt es inhomogene Systeme linearer Gleichungen ohne Lösung, zum Beispiel

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 1 \end{array} .$$

Beispiel 3 : Es soll eine Legierung aus b_i Gramm der Metalle M_i, $1 \le i \le m$, hergestellt werden. Zur Verfügung stehen Legierungen $L_1, \ldots, L_n$ der Metalle $M_1, \ldots, M_m$, wobei 1 Gramm der Legierung L_j jeweils A_{ij} Gramm des Metalls M_i enthält. Wieviele Gramm von $L_1, \ldots, L_n$ müssen für die gewünschte Legierung verschmolzen werden? Wir nehmen dabei an, dass beim Verschmelzen der Legierungen die Masse erhalten bleibt.

Das Verschmelzen von $x_1, \ldots, x_n$ Gramm der Legierungen $L_1, \ldots, L_n$ ergibt dann eine Legierung mit jeweils

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Gramm des Metalls M_i. Gesucht ist somit $L(A,b)$.

Definition 9 ist noch unvollständig, weil wir noch nicht präzise vereinbart haben, was eine „gute Beschreibung“ von $L(A,b)$ ist. Um diese Definition zu vervollständigen, brauchen wir ein paar Vorüberlegungen. Grundlegend dafür sind zwei einfache Beobachtungen, die wir in den Sätzen 9 und 10 formulieren:

Satz 9 : *Seien (A,b) ein System linearer Gleichungen mit Koeffizienten in K und z irgendeine Lösung davon. (Wir nehmen also insbesondere an, dass $L(A,b)$ nicht leer ist). Dann ist*

$$L(A,b) = \{z + v \mid v \in L(A,0)\}.$$

Beweis: Sei $v \in L(A,0)$. Dann ist $A(z+v) = Az + Av = b + 0 = b$, also $z + v \in L(A,b)$.

Sei $y \in L(A,b)$. Dann ist $A(y-z) = Ay - Az = b - b = 0$, also $y - z \in L(A,0)$ und $y = z + (y-z) \in \{z + v \mid v \in L(A,0)\}$.

Um die Lösungsmenge eines inhomogenen Systems linearer Gleichungen (A,b) zu beschreiben, genügt es somit, nur *eine* Lösung zu finden und die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A,0)$ zu beschreiben.

Satz 10 : *Seien $A \in K^{m\times n}$, $r,s \in K$ und $v,w \in L(A,0)$.*
Dann ist auch $rv+sw \in L(A,0)$.

Beweis: $A(rv+sw) = r(Av)+s(Aw) = 0+0 = 0.$

Für die Lösungsmenge L eines Systems linearer Gleichungen gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

(1) L ist leer („es gibt keine Lösung“).

(2) L enthält genau ein Element („eine Lösung existiert und ist eindeutig bestimmt“).

(3) L enthält mindestens zwei Elemente.

Im Fall (2) wird L durch die Angabe der eindeutig bestimmten Spalte, die Lösung des gegebenen Systems linearer Gleichungen ist, gut beschrieben.

Im Fall (3) ist das aber schwieriger. Wenn K unendlich ist (z.B. $K = \mathbb{Q}$), dann enthält L im Fall (3) nach Satz 9 und Satz 10 unendlich viele Elemente. Wie können wir L dann durch *endlich viele Daten* beschreiben? Um diese Frage zu beantworten, führen wir im nächsten Abschnitt die Begriffe „Vektorraum“ und „Basis“ ein.

§4. Vektorräume

Beim Rechnen mit $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper K haben wir zwei Rechenoperationen kennengelernt:

(1) Die Addition von zwei $m \times n$-Matrizen,
(2) Die „Multiplikation“ eines Elementes von K (eines „Skalars“) mit einer $m \times n$-Matrix.

Im Satz 1 wurden die dafür geltenden Rechenregeln angegeben.

Definition 10 : Sei V eine Menge und seien

$$+ : V \times V \to V \quad \text{sowie} \quad \cdot : K \times V \to V$$

Funktionen. Wir schreiben statt „$+(v,w)$“ kurz „$v+w$“ und statt „$\cdot(r,v)$“ kurz „$r \cdot v$ oder nur „rv“. Das Tripel $(V,+,\cdot)$ ist ein *Vektorraum über K*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) Für alle $r,s \in K$ und für alle $v,w \in V$ ist
$r(v+w) = (rv)+(rw)$ und $(r+s)v = (rv)+(sv)$.

(3) Für alle $r, s \in K$ und für alle $v \in V$ ist $(rs)v = r(sv)$ und $1_K v = v$.

Ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K, dann heißen die Elemente von V „*Vektoren*“, die Elemente von K „*Skalare*“, $+$ „*Addition*“ und $\cdot$ „*Skalarmultiplikation*“. Statt $(V, +, \cdot)$ wird oft nur V geschrieben. Das neutrale Element von $(V, +)$ wird mit 0_V bezeichnet und heißt der *Nullvektor*. Ein Vektor v heißt *ein skalares Vielfaches* eines Vektors w, wenn es ein Element $r \in K$ gibt mit $v = rw$. In diesem Fall sagt man auch, daß v das *r-fache von w* ist.

Man beachte, dass der Begriff „Vektor“ erst nach dem Begriff „Vektorraum“ eingeführt werden kann, so wie der Begriff „Tiroler“ erst nach dem Begriff „Tirol“ eingeführt werden kann.

Die Eigenschaften von Vektoren können kurz so beschrieben werden: Vektoren können miteinander addiert und mit Skalaren multipliziert werden. Dabei gelten gewisse Rechenregeln.

Ein Beispiel aus der Physik: alle Kräfte, die in einem vorgegebenen Punkt angreifen, bilden einen Vektorraum, weil sie addiert und mit Zahlen multipiziert werden können und dabei obige Rechenregeln gelten. Daher sind solche Kräfte Vektoren.

Die Addition und die Skalarmultiplikation von $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper erfüllen die Rechenregeln eines Vektorraums. Daher: „Matrizen sind Vektoren“.

Die Addition und die (Skalar-)Multiplikation von rationalen Zahlen erfüllen die Rechenregeln eines Vektorraums. Daher: „Rationale Zahlen sind Vektoren“.

Satz 11 : *Die Menge*

$$K^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in K\}$$

aller n-Tupel in K mit der komponentenweisen Addition

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$r(a_1, \ldots, a_n) := (ra_1, \ldots, ra_n)$$

ist ein Vektorraum über K und heißt Standard-Vektorraum über K der Dimension n. *In diesem Vektorraum ist* $0_V = (0, \ldots, 0)$ *und*
$-(a_1, \ldots, a_n) = (-a_1, \ldots, -a_n)$.

Beweis: Übung.

Beispiel 4 : Ein Kaufhaus bietet n Waren an. Sei U_{ij} die Anzahl der am Tag i verkauften Einheiten der Ware j. Dann gibt

$$U_{i-} = (U_{i1}, \ldots, U_{in}) \in K^n$$

den Umsatz am Tag i an,

$$U_{1-} + \cdots + U_{k-} = \left(\sum_{i=1}^{k} U_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{k} U_{in} \right)$$

ist der Umsatz vom ersten bis zum k-ten Tag, und

$$\frac{1}{k}\,(U_{1-} + \cdots + U_{k-}) \in K^n$$

ist der durchschnittliche Tagesumsatz während der ersten k Tage.

Satz 12: *Seien V ein Vektorraum über K, $r \in K$ und $v \in V$. Dann gilt:*

(1) *Es ist $rv = 0$ genau dann, wenn $r = 0$ oder $v = 0$ ist.*
(2) $(-r)v = r(-v) = -(rv)$.

Beweis: (1) Aus

$$0_V + 0_K v = 0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$$

folgt

$$0_V + 0_K v - 0_K v = 0_K v + 0_K v - 0_K v$$

und daher $0_K v = 0_V$. Ebenso folgt aus

$$0_V + r0_V = r0_V = r(0_V + 0_V) = r0_V + r0_V ,$$

dass $r0_V = 0_V$ ist. Wenn umgekehrt $rv = 0$ aber $r \neq 0$ ist, dann ist r invertierbar, weil K ein Körper ist, und

$$v = 1_K v = (r^{-1}r)v = r^{-1}(rv) = r^{-1}0_V = 0_V .$$

(2) Wegen $(rv) + (-r)v = [r + (-r)]v = 0_K v = 0_V$ ist $-(rv) = (-r)v$. Wegen $(rv) + (r(-v)) = r[v + (-v)] = r0_V = 0_V$ ist $-(rv) = r(-v)$.

Definition 11: Sei V ein Vektorraum über K. Eine Teilmenge U von V heißt *Untervektorraum* von V, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $0_V \in U$
(2) Sind zwei Vektoren u, v Elemente von U, dann auch ihre Summe $u + v$.
(3) Ist ein Vektor v Element von U, dann auch alle seine skalaren Vielfachen rv, $r \in K$.

Man schreibt dann

$$U \leq_K V \quad \text{oder kurz} \quad U \leq V.$$

Beispiel 5: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann sind $\{0\}$, V und $Kv := \{cv \,|\, c \in K\}$ (für jeden Vektor $v \in V$) Untervektorräume von V.

Satz 13: *Seien $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum über K und W ein Untervektorraum von V. Dann ist W mit $W \times W \longrightarrow W$, $(u,w) \longmapsto u+w$, und $K \times W \longrightarrow W$, $(c,w) \longmapsto c \cdot w$, selbst ein Vektorraum über K.*

Beweis: Übung.

Satz 14: *Die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum. (Anders formuliert: Die Nullspalte ist eine Lösung, die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung und alle skalaren Vielfachen von Lösungen sind wieder Lösungen).*

Beweis: Folgt aus Satz 10.

§5. Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition 12: Seien V ein Vektorraum über K und $v_1,\dots,v_n$ Vektoren in V. Ein Vektor $w \in V$ heißt eine *Linearkombination* von $v_1,\dots,v_n$, wenn es Elemente $c_1,\dots,c_n$ in K gibt, sodass

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n \ (= \sum_{i=1}^{n} c_iv_i)$$

ist.
Die Elemente $c_1,\dots,c_n$ heißen *Koeffizienten* von w bezüglich $v_1,\dots,v_n$.
Die Menge

$$\{\sum_{i=1}^{n} c_iv_i \,|\, c_1,\dots,c_n \in K\}$$

aller Linearkombinationen von $v_1,\dots,v_n$ ist ein Untervektorraum von V (nachprüfen), enthält $v_1,\dots,v_n$ und heißt der *von $v_1,\dots,v_n$ erzeugte Untervektorraum von V*. Er wird mit

$$_K\langle v_1,\dots,v_n\rangle \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=1}^{n} Kv_i$$

bezeichnet.

Definition 13: Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K. Ein n-Tupel $(v_1,\dots,v_n)$ von Vektoren in V heißt genau dann ein *Erzeugendensystem* von V bzw. *linear unabhängig* in V bzw. eine *Basis* von V, wenn jeder Vektor in V auf mindestens eine bzw. höchstens eine bzw. genau eine Weise als Linearkombination von $(v_1,\dots,v_n)$ geschrieben werden kann.
Wir schreiben *linear abhängig* anstatt *nicht linear unabhängig*.

Satz 15: *Sei $A \in K^{m\times n}$ und $y \in K^{n\times 1}$.*

(1) *Die Spalte Ay ist die Linearkombination der Spalten $A_{-1}, \ldots, A_{-n}$ mit Koeffizienten $y_1, \ldots, y_n$, das heißt*

$$Ay = y_1 A_{-1} + \ldots y_n A_{-n} \; .$$

(2) *$L(A,0)$ enthält genau dann nur ein Element (und zwar $0 \in K^{n\times 1}$), wenn das n-Tupel der Spalten $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ linear unabhängig ist.*
(3) *Für $b \in K^{m\times 1}$ hat das lineare Gleichungssystem (A,b) genau dann eine Lösung, wenn b ein Element des von den Spalten von A erzeugten Untervektorraums von $K^{m\times 1}$ ist.*
(4) *Das n-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann eine Basis von $K^{m\times 1}$, wenn für jede Spalte $b \in K^{m\times 1}$ das System linearer Gleichungen (A,b) genau eine Lösung hat.*

Beweis: (1) ist leicht nachzurechnen, (2), (3) und (4) folgen aus (1).

Satz 16: *Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K und $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in V.*

(1) *Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.*
(2) *Das n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*

$$_K\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$$

ist.

(3) *Das n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn für jedes n-Tupel $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ aus*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$$

folgt, dass

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

ist.

Beweis:

(1) und (2) folgen aus der Definition der Begriffe Erzeugendensystem, linear unabhängig und Basis.
(3) Wenn sich jeder Vektor aus V auf höchstens eine Weise als Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_n)$ schreiben lässt, dann folgt aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0_V = \sum_{i=1}^{n} 0_K v_i$$

auf Grund der Eindeutigkeit $c_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$.
Sei umgekehrt $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig in V und $w \in V$ so, dass es ein n-Tupel $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

gibt. Falls $(d_1, \ldots, d_n) \in K^n$ eine weiteres n-Tupel mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i$$

ist, erhält man

$$0_V = w - w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i - \sum_{i=1}^{n} d_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) v_i \,.$$

Nach Annahme folgt $c_i - d_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$, also $c_i = d_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 6 : Sei V ein Vektorraum über K. Ein einzelner Vektor $v \in V$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$ ist, weil aus $rv = 0$ nach Satz 12 $r = 0$ oder $v = 0$ folgt.

Satz 17 : *Das $m \cdot n$-Tupel*

$$(E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn})$$

der Standard-Matrizen (siehe Definition 7) ist eine Basis von $K^{m \times n}$ und heißt die Standardbasis *von $K^{m \times n}$.*

Insbesondere ist das n-Tupel $(e_1, \ldots, e_n)$ der Standard-Zeilen (siehe Definition 7) eine Basis von K^n und heißt die Standardbasis *von K^n.*

Beweis: Da für eine beliebige Matrix $A \in K^{m \times n}$

$$A = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} A_{k\ell} E_{k\ell}$$

ist, ist das $m \cdot n$-Tupel $(E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn})$ ein Erzeugendensystem von $K^{m \times n}$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass für gewisse $c_{k\ell} \in K$

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} c_{k\ell} E_{k\ell} = 0$$

ist. Dann folgt für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} c_{k\ell} (E_{k\ell})_{ij} = c_{ij} \,,$$

was zu zeigen war.

Definition 14: Sei V ein Vektorraum über K, $w \in V$ und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Das eindeutig bestimmte n-Tupel $(c_1, \dots, c_n)$ von Skalaren mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

heißt das *Koordinaten-n-Tupel* des Vektors w bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Das Element $c_i \in K$ heißt die *Koordinate* von w beim Basisvektor v_i (oder die i-te Koordinate von w bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$). Die Spalte

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$$

heißt *Koordinatenspalte* des Vektors w bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$.

Satz 18: *Sei V ein Vektorraum über K und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $w_1, \dots, w_m \in V$ und $T_{-1}, \dots, T_{-m}$ deren Koordinatenspalten bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$.*

(1) *Seien $c_1, \dots, c_n \in K$. Die Koordinatenspalte von $\sum_{i=1}^{m} c_i w_i$ bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$ ist $\sum_{i=1}^{m} c_i T_{-i}$. („Die Koordinatenspalte der Linearkombination ist die Linearkombination der Koordinatenspalten“).*

(2) *Das m-Tupel $(w_1, \dots, w_m)$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von V bzw. linear unabhängig in V bzw. eine Basis von V, wenn das entsprechende für das m-Tupel $(T_{-1}, \dots, T_{-m})$ seiner Koordinatenspalten gilt.*

Beweis: (1) ist leicht nachzuprüfen, (2) folgt aus (1).

Beispiel 7: Sei V ein Vektorraum über K und $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V. Seien $w_1, \dots, w_\ell \in V$, $u \in V$ und $c \in K^{n \times 1}$ die Koordinatenspalte von u bezüglich $(v_1, \dots, v_n)$.
Die Aufgabe

„Überprüfe, ob u eine Linearkombination von $(w_1, \dots, w_\ell)$ ist und - wenn ja - berechne ein (oder alle) ℓ-Tupel $(d_1, \dots, d_\ell)$ mit $u = \sum_{j=1}^{\ell} d_j w_j$“

kann als System linearer Gleichungen betrachtet werden:
Sei T die $n \times \ell$-Matrix, deren Spalten $T_{-1}, \dots, T_{-\ell}$ die Koordinatenspalten der Vektoren $w_1, \dots, w_\ell$ bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$ sind. Gesucht ist eine ℓ-Spalte (oder alle ℓ-Spalten) $d \in K^{\ell \times 1}$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = u = \sum_{j=1}^{\ell} d_j w_j = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{\ell} T_{ij} d_j) v_i$$

ist. Daher ist eine solche Spalte d eine Lösung des Systems linearer Gleichungen (T,c).

Nach Einführung des Begriffes „Basis“ kann die Definition eines Systems linearer Gleichungen (A,b) präzisiert werden. Eine „gute Beschreibung von $L(A,b)$“ finden heißt:

„Berechne irgendeine Lösung von (A,b) und eine Basis des Lösungsraums von $(A,0)$“.

Man beachte, dass damit nur *endlich viele Daten* zu berechnen sind, diese bestimmen aber vollständig die (möglicherweise unendliche) Lösungsmenge $L(A,b)$.

§6. Der Gauss-Algorithmus

Wir werden nun eine Methode zum Lösen eines Systems linearer Gleichungen (A,b) kennenlernen. Zunächst betrachten wir einen Spezialfall, in dem die Matrix A eine besonders einfache Gestalt hat. In diesem Fall können wir die Lösungsmenge direkt anschreiben (Satz 19). Danach werden wir den allgemeinen Fall auf den einfachen Fall zurückführen, indem wir die Daten (A,b) schrittweise so verändern, dass die geänderten Daten (A',b') schließlich die einfache Gestalt haben und

$$L(A,b) = L(A',b')$$

ist (Satz 21 und Satz 23).

Den Übergang von den Daten (A,b) zu (A',b') nennt man „die Gleichungen umformen“. Gilt dabei $L(A,b) = L(A',b')$, dann sind die Umformungen „erlaubt“.

Definition 15 : Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ hat *Stufenform*, wenn die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(1) Ist $A_{i-} = 0$, dann sind auch $A_{(i+1)-} = \cdots = A_{m-} = 0$.
(2) Der (von links gelesen) erste Koeffizient $\neq 0$ in jeder Zeile heißt *Pivot* und ist 1.
(3) Der Pivot von Zeile $i+1$ steht rechts vom Pivot von Zeile i.
(4) Der Pivot jeder Zeile ist der einzige Koeffizient $\neq 0$ in seiner Spalte.

Eine Matrix in Stufenform hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wobei die Sterne für beliebige Elemente von K stehen.

Definition 16 : Der *Spaltenraum* bzw. *Zeilenraum* einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist der Untervektorraum von $K^{m\times 1}$ bzw. $K^{1\times n}$, der von den Spalten bzw. Zeilen dieser Matrix erzeugt wird.

Beispiel 8 : $A \in K^{m\times n}$ sei eine Matrix in Stufenform mit r Pivots. Dann ist das r-Tupel $(e_1,\dots,e_r)$ der ersten r Standard-Spalten in $K^{m\times 1}$ eine Basis des Spaltenraums von A.
Wenn $p_1,\dots,p_r$ die Spaltenindizes der Pivots sind, dann ist

$$A_{-p_1} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, A_{-p_r} = e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

und

$$A_{-\ell} = \sum_{i=1}^{r} A_{i\ell} e_i = \sum_{i=1}^{r} A_{i\ell} A_{-p_i} \,.$$

Satz 19 : *Sei (A,b) ein System linearer Gleichungen über K mit $A \in K^{m\times n}$ in Stufenform. Sei r die Anzahl der Pivots $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ die Spaltenindizes der Pivots und $\{q_1,\dots,q_{n-r}\} := \{1,\dots,n\} \setminus \{p_1,\dots,p_r\}$. Dann gilt:*

(1) *$L(A,b)$ ist genau dann nicht leer, wenn für alle $i > r$ gilt: $b_i = 0$. In diesem Fall ist*

$$z := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in L(A,b),$$

wobei die Elemente $b_1,\dots,b_r$ in den Zeilen mit Index $p_1,\dots,p_r$ stehen.

(2) *Sei*

$$w_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -A_{1q_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -A_{rq_j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leq j \leq n-r$, wobei die Elemente $-A_{1q_j}, \ldots, -A_{rq_j}$ in den Zeilen mit Index $p_1, \ldots, p_r$ sowie 1 in der Zeile mit Index q_j stehen.
Dann ist $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ eine K-Basis von $L(A,0)$.

Beweis: Seien $e_1, \ldots, e_m$ die Standardspalten von $K^{m\times 1}$. Dann ist

$$A_{-p_1} = e_1, \ldots, A_{-p_r} = e_r\,.$$

(1) Wenn $L(A,b)$ nicht leer ist, dann gibt es ein y mit $Ay = b$, und es folgt $b_i = A_{i-}y = 0$ für $i > r$. Sei umgekehrt $b_i = 0$ für $i > r$. Sei $z \in K^{n\times 1}$. Nach Satz 15 ist $Az = b$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{r} b_i e_i = b = \sum_{i=1}^{n} z_i A_{-i} = \sum_{i=1}^{r} z_{p_i} A_{-p_i} + \sum_{i=1}^{n-r} z_{q_i} A_{-q_i} = \sum_{i=1}^{r} z_{p_i} e_i + \sum_{i=1}^{n-r} z_{q_i} A_{-q_i}$$

ist. Wählt man daher $z_{q_i} := 0$ für $1 \leq i \leq n-r$ und $z_{p_i} := b_i$, $1 \leq i \leq r$, dann ist $Az = b$.
(2) Für $1 \leq j \leq n$ ist

$$A_{-j} = \sum_{i=1}^{r} A_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} A_{ij} A_{-p_i}\,,$$

also

$$A_{-j} - \sum_{i=1}^{r} A_{ij} A_{-p_i} = 0\,.$$

Nach Satz 15 ist also $w_j \in L(A,0)$.
Seien $t_1, \ldots, t_{n-r} \in K$. Für $1 \leq j \leq n-r$ ist dann die q_j-te Komponente der Spalte $\sum_{i=1}^{n-r} t_i w_i$ gleich t_j. Wenn die Linearkombination gleich 0 ist, müssen auch alle t_j, $1 \leq j \leq n-r$ gleich 0 sein. Daher ist $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ linear unabhängig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass jedes $v \in L(A,0)$ als Linearkombination von $(w_1,\dots,w_{n-r})$ geschrieben werden kann. Wir zeigen dazu, dass

$$v = \sum_{j=1}^{n-r} v_{q_j} w_j$$

ist. Für $1 \le i \le n-r$ ist

$$(\sum_{j=1}^{n-r} v_{q_j} w_j)_{q_i} = \sum_{j=1}^{n-r} v_{q_j} \delta_{ij} = v_{q_i}\,,$$

es genügt also zu zeigen, dass $(\sum_{j=1}^{n-r} v_{q_j} w_j)_{p_i} = v_{p_i}$ ist, $1 \le i \le r$. Aus $Av = 0$ folgt für alle $i \le r$:

$$0 = A_{i-} v = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j = v_{p_i} + \sum_{j=1}^{n-r} A_{ij} v_{q_j}\,.$$

Somit gilt für $1 \le i \le r$

$$v_{p_i} = \sum_{j=1}^{n-r} (-A_{ij}) v_{q_j} = \sum_{j=1}^{n-r} (w_j)_{p_i} v_{q_j} = (\sum_{j=1}^{n-r} v_{q_j} w_j)_{p_i}\ .$$

Beispiel 9 : Der Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$((1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_n),(b_1))$$

(oder, anders geschrieben, $x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b_1$) ist

$$\{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -a_2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_{n-1} \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1,\dots,c_{n-1} \in K\}\,.$$

Unser nächstes Ziel ist es, beliebige Systeme linearer Gleichungen zu lösen. Ein erster Schritt dazu ist der folgende Satz.

Satz 20 : *Sei (A,b) ein System linearer Gleichungen mit $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt für alle $P \in \mathrm{GL}_m(K)$*

$$L(PA,Pb) = L(A,b).$$

Beweis: Ist $y \in L(A,b)$, dann ist $Ay = b$, also auch $PAy = Pb$ und $y \in L(PA,Pb)$. Daher ist $L(A,b)$ eine Teilmenge von $L(PA,Pb)$.
Ist $y \in L(PA,Pb)$, dann ist $PAy = Pb$, also auch $Ay = P^{-1}PAy = P^{-1}Pb = b$ und $y \in L(A,b)$. Daher ist $L(PA,Pb)$ eine Teilmenge von $L(A,b)$.

Satz 20 legt nahe, zu einem gegebenen System linearer Gleichungen (A,b) eine invertierbare Matrix P zu suchen, sodass das System (PA,Pb) Stufenform hat. Dann kann die Lösungsmenge mit Satz 19 bestimmt werden.

Satz 21 : *Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ kann durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform gebracht werden, genauer gesagt gibt es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_m(K)$, die Produkt von höchstens mn Elementarmatrizen ist, sodass PA Stufenform hat. Diese Matrix PA kann mit dem folgenden Algorithmus berechnet werden* (Gauss-Elimination)*:*

(1) *Setze $C := A$, $i := 1$ und $j := 1$.*
(2) *Falls $C_{ij} \neq 0$ ist, gehe zu Schritt 4.*
Ansonsten suche ein $k \in \{i+1,\dots,m\}$ mit $C_{kj} \neq 0$.
(3) *Falls es kein $k \in \{i+1,\dots,m\}$ mit $C_{kj} \neq 0$ gibt, erhöhe j um 1 und wiederhole Schritt 2.*
Ansonsten vertausche die i-te und k-te Zeile von C und nenne die neue Matrix wieder C. (Dann ist $C_{ij} \neq 0$).
(4) *Multipliziere die i-te Zeile von C mit C_{ij}^{-1} und nenne die neue Matrix wieder C. (Dann ist $C_{ij} = 1$).*
(5) *Für $\ell \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i\}$ mit $C_{\ell j} \neq 0$ subtrahiere das $C_{\ell j}$-fache der i-ten Zeile von der ℓ-ten Zeile und nenne die neue Matrix wieder C. (Dann ist $C_{-j} = e_i$).*
(6) *Erhöhe i und j um 1 und gehe zu Schritt 2.*

Der Algorithmus wird abgebrochen, sobald $i > m$ oder $j > n$ ist. Dann hat die Matrix C Stufenform.

Beweis: Der Algorithmus bricht nach höchstens n Durchläufen ab, weil in jedem Durchlauf j um 1 erhöht wird. Seien $P_1,\dots,P_s$ die Elementarmatrizen zu den im Algorithmus der Reihe nach durchgeführten elementaren Zeilenumformungen. Da pro Durchlauf höchstens m elementare Zeilenumformungen durchgeführt werden, ist $s \leq nm$. Nach Satz 7 erhält man am Ende des Algorithmus die Matrix

$$(P_s \dots (P_2(P_1A))\dots) = (P_s \dots P_2P_1)A,$$

und nach Satz 8 ist

$$P := P_s \dots P_2P_1 \in \mathrm{GL}_m(K).$$

Schließlich hat die Matrix PA Stufenform, weil in jedem Durchlauf die ersten $j-1$ Spalten nicht mehr verändert werden und in der j-ten Spalte entsprechend umgeformt wird.

Der Beweis zeigt, dass man die Matrix P erhält, indem man die elementaren Zeilenumformungen nicht nur auf A, sondern auch auf die Einheitsmatrix I_m anwendet:

$$(A|I_m) \to (P_1A|P_1I_m) \to \cdots \to (P_s \ldots P_1A|P_s \ldots P_1I_m) = (PA|P).$$

Satz 22 : *Sei $A \in K^{m\times m}$. Auf die folgende Weise kann überprüft werden, ob A invertierbar ist und, wenn ja, die zu A inverse Matrix A^{-1} berechnet werden:*

Bringe A durch Gauss-Elimination auf Stufenform, wobei die elementaren Zeilenoperationen auch auf die Einheitsmatrix angewendet werden:

$$(A|I_m) \to (PA|P).$$

Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $PA = I_m$ ist. In diesem Fall ist $A^{-1} = P$.

Beweis: Wenn A invertierbar ist, dann sind $A, P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und somit auch $B := PA \in \mathrm{GL}_m(K)$. Da B Stufenform hat, ist $B = I_m$ oder $B_{m-} = 0$. Aus $B_{m-} = 0$ würde aber

$$0 = B_{m-}(B^{-1})_{-m} = (BB^{-1})_{mm} = 1,$$

folgen, also muss $B = I_m$ sein. Umgekehrt folgt aus $PA = I_m$ auch
$AP = P^{-1}(PA)P = I_m$ und somit $P = A^{-1}$.

Beispiel 10 : Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. In diesem Fall ist

$$A^{-1} := (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Satz 23 : *Ein System linearer Gleichungen (A,b) über dem Körper K kann gelöst werden, indem man die Matrix A durch Gauss-Elimination auf Stufenform bringt und b „mittransformiert“. Dazu führt man die elementaren Zeilenumformungen an der „erweiterten Matrix“ $(A|b)$ aus und erhält $(PA|Pb)$. Dann ist*

$$L(A,b) = L(PA,Pb),$$

und $L(A,b)$ kann nach Satz 19 berechnet werden.
Insbesondere gibt es genau dann genau eine Lösung, wenn

$$PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Pb = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $c \in K^{n\times 1}$ ist. Die eindeutige Lösung ist dann

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Wenn A sogar invertierbar ist, dann hat (A,b) die eindeutige Lösung

$$A^{-1}b.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 20 und Satz 19.

Satz 24: *Ein homogenes System linearer Gleichungen $(A,0)$ über dem Körper K hat immer die* triviale Lösung 0. *Wenn $A \in K^{m\times n}$ mit $m < n$ ist, d.h. es sind weniger Gleichungen als Unbekannte vorhanden, dann gibt es auch eine Lösung, die nicht trivial ist.*

Beweis: Wenn $m < n$ ist, dann kann $PA \in K^{m\times n}$ nicht die Form

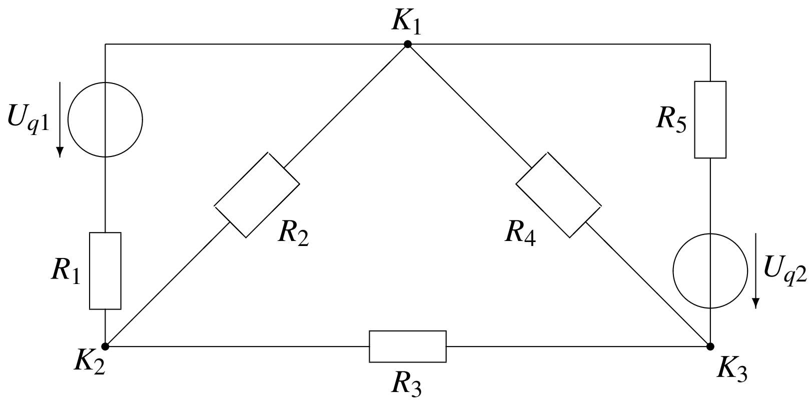
$$\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, und nach Satz 23 gibt es mehr als eine Lösung.

§7. Kirchhoff'sche Gesetze und Systeme linearer Gleichungen

Mit den Methoden von §6 kann die folgende Aufgabe aus der Elektrotechnik gelöst werden.

In der folgenden Schaltung sind die Spannungen U_{q1} und U_{q2}, sowie die Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 bekannt. Gesucht sind die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 durch die Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.
Die Spannung wird in Volt (V), die Stromstärke in Ampère (A) und der Widerstand in Ohm (Ω) gemessen.



Wir beschreiben diese Aufgabe als System linearer Gleichungen. Für die Modellierung brauchen wir die folgenden physikalischen Gesetze:

Ohm'sches Gesetz

$$R \cdot I = U$$

(Widerstand mal Stromstärke ist Spannung)

Kirchhoff'sche Gesetze

Die Kirchhoff'schen Gesetze beschreiben jeweils den Zusammenhang zwischen mehreren elektrischen Strömen bzw. zwischen mehreren elektrischen Spannungen in einem elektrischen Netzwerk.

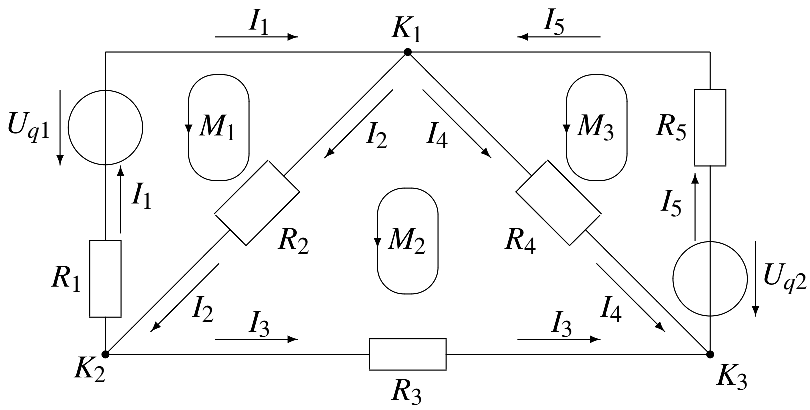
Werden mehrere Leitungen in einem Punkt verbunden, nennt man diesen einen *Knoten* der Schaltung (im Bild oben sind K_1, K_2 und K_3 Knoten). Leitungen zwischen zwei Knoten nennt man *Zweige* der Schaltung.
Für jeden Zweig wird eine Richtung vorgegeben, d.h. eine Reihenfolge seiner zwei Knoten.
Die Spannung und die Stromstärke haben positives Vorzeichen, wenn die (angenommene) Richtung des Stroms mit der Richtung des Zweiges übereinstimmt, sonst negatives.
Ein Strom durch einen Zweig heißt in *a zufließend*, wenn a der zweite Knoten des Zweiges ist, und von *a abfließend*, wenn a der erste Knoten des Zweiges ist.

1. Kirchhoff'sches Gesetz (Knotensatz):
   Die Summe der zufließenden Ströme in einem Knoten ist gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Eine endliche Menge $M \neq \emptyset$ von Zweigen mit der folgenden Eigenschaft heißt *Masche*: Ist $\ell \in M$ und ist a ein Knoten von ℓ, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Zweig $k \in M \setminus \{\ell\}$, sodass a auch ein Knoten von k ist.
Auf die folgende Weise legen wir eine *Umlaufrichtung* der Masche fest: Es sei M eine Masche und $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge aller Knoten dieser Masche. Wir setzen $a_{n+1} := a_1$. Wir können die Indizes so wählen, dass die Zweige der Masche zwischen den Knoten a_i und a_{i+1}, $1 \leq i \leq n+1$, verlaufen und dass a_1 der erste Knoten des Zweiges zwischen a_1 und a_2 ist.
Dann ist der Zweig zwischen a_i und a_{i+1} *in der Umlaufrichtung* der Masche, wenn a_i sein erster Knoten ist, sonst *gegen die Umlaufrichtung*.

2. Kirchhoff'sches Gesetz (Maschensatz):
   Die Summe der Spannungen von Zweigen einer Masche in der Umlaufrichtung ist gleich der Summe der Spannungen von Zweigen einer Masche gegen die Umlaufrichtung.

Wir wählen Stromrichtungen von I_j, für $j = 1, \dots, 5$ und Richtungen für die Quellspannungen, somit auch Richtungen der Zweige.



Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen erhalten wir die folgenden Bedingungen für die Zahlen $I_1, \dots, I_n$:

Knotengleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} K_1: & I_1+I_5 & = & I_2+I_4 \\ K_2: & I_2 & = & I_1+I_3 \\ K_3: & I_3+I_4 & = & I_5 \end{array}$$

Maschengleichungen:

$$\begin{array}{lcccc} M_1 & : & I_1\cdot R_1+I_2\cdot R_2 & = & U_{q1} \\ M_2 & : & I_2\cdot R_2+I_3\cdot R_3 & = & I_4\cdot R_4 \\ M_3 & : & I_4\cdot R_4+I_5\cdot R_5 & = & U_{q2} \\ M_4 & : & I_1\cdot R_1+I_4\cdot R_4 & = & I_3\cdot R_3+U_{q1} \\ M_5 & : & I_2\cdot R_2+I_3\cdot R_3+I_5\cdot R_5 & = & U_{q2} \\ M_6 & : & I_1\cdot R_1+U_{q2} & = & U_{q1}+I_3\cdot R_3+I_5\cdot R_5 \end{array}$$

Die Bedingungen K_1, M_4, M_5, M_6 folgen aus K_2, K_3, M_1, M_2, M_3, also können wir sie weglassen.

Man erhält nun das System linearer Gleichungen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ U_{q2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 für $U_{q1} = 18.6\,V$, $U_{q2} = 13.2\,V$ und $R_1 = 1.5\,k\Omega$, $R_2 = 680\,\Omega$, $R_3 = 470\,\Omega$, $R_4 = 520\,\Omega$, $R_5 = 710\,\Omega$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1500 & 680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 680 & 470 & -520 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 520 & 710 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.6 \\ 0 \\ 13.2 \end{pmatrix},$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung ist

$$\begin{array}{lcrcr} I_1 & = & 0.00859\,A & = & 8.59\,mA \\ I_2 & = & 0.00841\,A & = & 8.41\,mA \\ I_3 & = & -0.00018\,A & = & -0.18\,mA \\ I_4 & = & 0.01083\,A & = & 10.83\,mA \\ I_5 & = & 0.01066\,A & = & 10.66\,mA \end{array}$$

Das negative Vorzeichen von I_3, bedeutet, dass dieser Strom gegen die gewählte Richtung des Zweiges fließt.

§8. Dimension

Satz 25 : *Seien V ein Vektorraum über K, $(u_1, \ldots, u_m)$ ein linear unabhängiges m-Tupel von Vektoren in V und $v \in V$ mit*

$$v \notin {}_K\langle u_1, \ldots, u_m \rangle .$$

Dann ist auch das $m+1$-Tupel $(u_1, \ldots, u_m, v)$ linear unabhängig.

Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_m \in K$ und $d \in K$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} c_j u_j + dv = 0 .$$

Wenn $d \neq 0$ ist, wäre

$$v = -\sum_{j=1}^{m} d^{-1} c_j u_j \in {}_K\langle u_1, \ldots, u_m \rangle$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist $d = 0$ und, da $(u_1, \ldots, u_m)$ linear unabhängig ist, auch $c_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$.

Definition 17 : Ein Vektorraum V heißt *endlich-erzeugt*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem von V gibt.

Satz 26: *Seien $\{0\} \neq V$ ein endlich-erzeugter Vektorraum über K, $(w_1,\ldots,w_n)$ ein Erzeugendensystem von V und $(u_1,\ldots,u_m)$ ein linear unabhängiges m-Tupel von Vektoren in V.*
Dann gilt:

(1) *Aus $(w_1,\ldots,w_n)$ kann eine Basis ausgesondert werden, d.h. es gibt eine Teilmenge $\{i_1,i_2,\ldots i_\ell\}$ von $\{1,\ldots,n\}$, sodass $(w_{i_1},\ldots,w_{i_\ell})$ eine Basis von V ist.*
Insbesondere hat jeder endlich-erzeugte Vektorraum V über K eine Basis.

(2) *$(u_1,\ldots,u_m)$ kann durch Vektoren aus $\{w_1,\ldots,w_n\}$ zu einer Basis ergänzt werden, d.h. es gibt Indizes $j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,n\}$, sodass $(u_1,\ldots,u_m,w_{j_1},\ldots,w_{j_k})$ eine Basis von V ist.*

Beweis: (1) Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n=1$ ist wegen $\{0\} \neq V$ auch $w_1 \neq 0$, also ist der Vektor w_1 linear unabhängig und somit eine Basis von V.
Sei nun $n>1$. Wenn $(w_1,\ldots,w_n)$ linear unabhängig ist, dann ist $(w_1,\ldots,w_n)$ eine Basis von V und die Behauptung bewiesen. Wenn $(w_1,\ldots,w_n)$ linear abhängig ist, dann gibt es $c_1,\ldots,c_n \in K^n$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} c_i w_i = 0$$

aber $c_k \neq 0$ ist für ein $k \in \{1,\ldots,n\}$. Es folgt

$$w_k = -\sum_{i\neq k} c_k^{-1} c_i w_i \,.$$

Dann ist auch $(w_1,\ldots,w_{k-1},w_{k+1},\ldots,w_n)$ ein Erzeugendensystem von V, weil es für einen beliebigen Vektor $y \in V$ Elemente $d_1,\ldots,d_n \in K$ mit

$$y = \sum_{i=1}^{n} d_i w_i = \sum_{i\neq k} (d_i - d_k c_k^{-1} c_i) w_i$$

gibt. Nach Induktionsannahme kann aus $(w_1,\ldots,w_{k-1},w_{k+1},\ldots,w_n)$ eine Basis von V ausgesondert werden, also auch aus $(w_1,\ldots,w_n)$.

(2) Sei U der von $u_1,\ldots,u_m$ erzeugte Untervektorraum von V. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach

$$p := \#\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid w_i \notin U\} \,.$$

Für $p=0$ ist $w_i \in U$ für alle i, daher $U=V$ und $(u_1,\ldots,u_m)$ eine Basis von V. Sei nun $p>0$. Dann gibt es ein $j_1 \in \{1,\ldots,n\}$, für das $w_{j_1} \notin U$ ist. Nach Satz 25 ist $(u_1,\ldots,u_m,w_{j_1})$ linear unabhängig. Nach Induktionsannahme kann $(u_1,\ldots,u_m,w_{j_1})$ durch Vektoren aus $\{w_1,\ldots,w_m\}$ zu einer Basis von V ergänzt werden, also auch $(u_1,\ldots,u_m)$.

Satz 27 : *Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum über K. Dann enthalten je zwei Basen von V gleich viele Vektoren.*

Beweis: Sei $(v_1,\ldots,v_n)$ ein Erzeugendensystem von V und $(w_1,\ldots,w_m)$ in V linear unabhängig. Wir zeigen zuerst, dass $m \leq n$ sein muss.
Weil $(v_1,\ldots,v_n)$ ein Erzeugendensystem von V ist, können wir w_j als Linearkombination von $(v_1,\ldots,v_n)$ schreiben:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} v_i \,, 1 \leq j \leq m.$$

Wäre $n < m$, hätte die Matrix $A := (A_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ mehr Spalten als Zeilen, also gäbe es nach Satz 24 eine n-Spalte $x \neq 0$ mit $Ax = 0$. Daher wäre

$$\sum_{j=1}^{m} x_j w_j = \sum_j x_j (\sum_i A_{ij} v_i) = \sum_i (\sum_j A_{ij} x_j) v_i = \sum_i 0 \cdot v_i = 0\,,$$

im Widerspruch zu $x \neq 0$ und $(w_1,\ldots,w_m)$ linear unabhängig.
Wenn nun sowohl $(v_1,\ldots,v_n)$ als auch $(w_1,\ldots,w_m)$ eine Basis ist, ist einerseits $m \leq n$, weil $(v_1,\ldots,v_n)$ ein Erzeugendensystem von V und $(w_1,\ldots,w_m)$ linear unabhängig ist, und andererseits $n \leq m$, weil auch $(w_1,\ldots,w_m)$ ein Erzeugendensystem von V und $(v_1,\ldots,v_n)$ linear unabhängig ist.

Definition 18 : Sei $\{0\} \neq V$ ein endlich-erzeugter Vektorraum über K. Die Zahl

$$\dim_K(V) := \text{Anzahl der Elemente einer Basis von } V$$

(ist nach Satz 27 wohldefiniert und) heißt die *Dimension* von V.
Für den Nullraum $\{0\}$ definieren wir: die leere Menge ist eine Basis von $\{0\}$ und $\dim_K(V) = 0$.
Sprechweisen: Wenn $\dim_K(V) = n$ ist, dann nennt man V *n-dimensional*. Ein endlich-erzeugter Vektorraum heißt *endlich-dimensional*. Ein nicht endlich-erzeugter Vektorraum W heißt *unendlich-dimensional*.

Die Dimension eines Vektorraums ist also die kleinste Anzahl von Zahlen (oder, allgemeiner, von Elementen von K), die für die vollständige Beschreibung eines Vektors in V nötig sind.

Beispiel 11 : Nach Satz 17 ist
$\dim_K(K^n) = n$ und $\dim_K(K^{m\times n}) = m \cdot n$.

Satz 28 : *Sei V ein Vektorraum über K der Dimension n und $(v_1,\dots,v_n) \in V^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *$(v_1,\dots,v_n)$ ist eine Basis von V.*
(2) *$(v_1,\dots,v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V.*
(3) *$(v_1,\dots,v_n)$ ist linear unabhängig.*

Beweis: Aus (1) folgen immer (2) und (3).
$(2) \Rightarrow (1)$: Nach Satz 26 kann aus $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis ausgesondert werden, die wegen $\dim_K(V) = n$ wieder aus n Vektoren besteht. Somit muss $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis sein.
$(3) \Rightarrow (1)$: analog.

Definition 19 : Der *Rang* einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist die Dimension des Spaltenraums von A (siehe Definition 16). Schreibweise: $\mathrm{rg}(A)$.

Satz 29 : *Es sei $A \in K^{m\times n}$ und $P \in \mathrm{GL}_m(K)$. Dann gilt:*

(1) *Das n-Tupel der Spalten $(A_{-1},\dots,A_{-n})$ von A ist genau dann linear unabhängig, wenn das n-Tupel der Spalten $((PA)_{-1} = PA_{-1},\dots,(PA)_{-n} = PA_{-n})$ von PA linear unabhängig ist.*
(2) *Das n-Tupel der Spalten $(A_{-1},\dots,A_{-n})$ ist genau dann eine Basis des Spaltenraums von A, wenn das n-Tupel der Spalten $((PA)_{-1} = PA_{-1},\dots,(PA)_{-n} = PA_{-n})$ eine Basis des Spaltenraums von PA ist. Insbesondere sind der Rang von A und von PA gleich.*

Beweis: Seien $c_1,\dots,c_n \in K$. Weil P invertierbar ist, ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (PA)_{-i} = P(\sum_{i=1}^{n} c_i A_{-i}) = 0$$

genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A_{-i} = 0$$

ist.

Satz 30 : *Seien $A \in K^{m\times n}$ und $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ so, dass PA Stufenform hat. Sei r die Anzahl der Pivots in PA. Dann ist $r = \mathrm{rg}(A)$ und die Dimension von $L(A,0)$ ist $n - \mathrm{rg}(A)$.*

Beweis: Nach Satz 19 ist $n-r$ die Dimension von $L(PA,0)$. Da PA Stufenform hat, ist leicht nachzuprüfen, dass $\mathrm{rg}(PA) = r$ ist. Weiters ist $L(PA,0) = L(A,0)$. Also folgen die Behauptungen aus Satz 29.

Satz 31 : *Sei $A \in K^{m\times n}$.*

(1) *Mit dem folgenden Verfahren kann* $\mathrm{rg}(A)$ *berechnet und aus dem n-Tupel der Spalten von A eine Basis des Spaltenraums von A ausgesondert werden:*

Bringe A durch elementare Umformungen auf Stufenform PA. Sei r die Anzahl der Pivots von PA, und die Pivots seien in den Spalten mit Indizes $p_1,\dots,p_r$. Dann ist $\mathrm{rg}(A) = r$ *und* $(A_{-p_1},\dots,A_{-p_r})$ *eine Basis des Spaltenraums von A.*

(2) *Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, kann* $(A_{-1},\dots,A_{-n})$ *mit dem folgenden Verfahren zu einer Basis von $K^{m\times 1}$ ergänzt werden:*

Bringe $(A \mid I_m)$ durch elementare Umformungen wie in Satz 21 auf Stufenform $Q(A \mid I_m)$. Dann stehen die Pivots in den Spalten mit Indizes

$$1,2,\dots,n,n+r_1,\dots,n+r_{m-n}\,,$$

und $(A_{-1},\dots,A_{-n},e_{r_1},\dots,e_{r_{m-n}})$ ist eine Basis von $K^{m\times 1}$. Dabei sind die Spalten e_j, $j = r_1,\dots,r_{m-n}$, Standardspalten in $K^{m\times 1}$.

Beweis:

(1) Das r-Tupel $(PA_{-p_1},\dots,PA_{-p_r})$ von Spalten ist eine Basis des Spaltenraums von PA, nach Satz 29 ist daher $(A_{-p_1},\dots,A_{-p_r})$ eine Basis des Spaltenraums von A.

(2) Der Spaltenraum von $(A \mid I_m)$ ist $K^{m\times m}$. Da die Spalten von A linear unabhängig sind, stehen in den ersten Spalten n von $Q(A \mid I_m)$ Pivots. Wende (1) auf die Matrix $(A \mid I_m)$ an.