Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2011

16. Juni 2011

64) Es sei V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine Orthonormalbasis von V und f die Spiegelung um die Gerade durch 0 und $v_1 - 3v_2$.
Geben Sie eine Basis $\underline{w}$ an, bezüglich der die Matrix von f Diagonalgestalt hat.
Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Basis $\underline{v}$.
Es sei t die Translation in V, die 0 auf $v_1 + v_2$ abbildet. Ist $t \circ f$ eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung? Berechnen Sie in jedem Fall die Spiegelungsgerade.

65) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum, der durch die Basis $(1, i)$ orientiert ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \longmapsto (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z + 2 - i$$

eine Drehung ist. Berechnen Sie ihren Drehpunkt und ihren Drehwinkel.
Zeigen Sie: Jede Drehung um 0 ist eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

66) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der durch die Standardbasis gegebenen Orientierung als orientierten euklidischen Raum. Was ist eine *Drehung* in $\mathbb{R}^3$? Was ist die *Drehachse*, was ist die *Drehebene*, was ist der *Drehwinkel* einer Drehung? Berechnen Sie die Matrix bezüglich der Standardbasis der Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}(2, -2, 1)$ mit Drehwinkel $\frac{2\pi}{3}$. Dabei sei die Drehebene E so orientiert, dass für eine positiv orientierte Basis (u, v) von E die Basis $(u, v, (2, -2, 1))$ von $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert ist.

67) Es seien V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V und f die lineare Funktion von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{v}$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist. Überprüfen Sie, ob f eine Drehung oder eine Drehspiegelung ist und berechnen Sie in diesem Fall die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels.

68) Was ist eine *Schraubung*, was ist eine *Drehspiegelung*? Die folgenden Funktionen f, g von $\mathbb{R}^{3\times1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} -\frac{3\,x}{13} + \frac{4\,y}{13} - \frac{12\,z}{13} \\ \frac{12\,x}{13} - \frac{3\,y}{13} - \frac{4\,z}{13} \\ \frac{4\,x}{13} + \frac{12\,y}{13} + \frac{3\,z}{13} \end{bmatrix}$$

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} + 2 \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} - 1 \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} + 2 \end{bmatrix}$$

69) Die folgenden Funktionen h, k von $\mathbb{R}^{3\times1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{x}{9} - \frac{4\,y}{9} + \frac{8\,z}{9} - 1 \\ -\frac{4\,x}{9} + \frac{7\,y}{9} + \frac{4\,z}{9} - 1 \\ \frac{8\,x}{9} + \frac{4\,y}{9} + \frac{z}{9} + 3 \end{bmatrix}$$

$$k(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} \end{bmatrix}$$