Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2011

14. April 2011

31) Es sei V ein reeller Vektorraum. Was ist eine *Bilinearform* von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$? Was ist die *Matrix einer Bilinearform* bezüglich einer Basis von V? Zeigen Sie, dass die Funktion

$$b : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A, B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A^\top \circ B)$$

bilinear ist und berechnen Sie ihre Matrizen bezüglich der Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) .$$

32) Wann sind zwei Matrizen *kongruent*? Erläutern Sie, wie man eine zu einer gegebenen reellen symmetrischen Matrix kongruente Diagonalmatrix berechnet. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie eine invertierbare 4×4-Matrix P so, daß $P^T \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

33) Was ist die *Signatur* einer reellen symmetrischen Matrix bzw. einer reellen symmetrischen Bilinearform? Berechnen Sie die Signatur der Bilinearform

$$b : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A, B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A^\top \circ B)$$

und der folgenden zwei reellen symmetrischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

34) Wann ist eine reelle symmetrische Matrix *positiv definit*? Wie überprüft man, ob eine reelle symmetrische Matrix positiv definit ist? Wie überprüft man, ob eine reelle Bilinearform ein Skalarprodukt ist? Es seien V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum, $\underline{v}$ eine Basis von V und b_1, b_2, b_3 die Bilinearformen auf V, deren Matrizen bezüglich $\underline{v}$ gleich

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

sind. Überprüfen Sie, welche der drei Bilinearformen ein Skalarprodukt ist und berechnen Sie durch Kongruenzumformungen ihrer Matrix eine Orthonormalbasis bezüglich diesem Skalarprodukt von V.

35) Überprüfen Sie, ob $(0,0,0)$ ein relatives Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_3 - x_2x_3\ ,$$

ist.

36) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine positiv definite reelle symmetrische Matrix und

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass B positiv definit ist.
Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung dieser zwei Matrizen!