Differentialrechnung - algebraisch betrachtet

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik und Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

LehrerInnentag Innsbruck 2013
27. September 2013

Einleitung

Ein großer Teil der Aufgaben zur Differentialrechnung im Schulunterricht betrifft nur Polynomfunktionen. Diese Aufgaben können bereits mit den Kenntnissen der 10. Schulstufe (also ohne den Begriff „Grenzwert“) gelöst werden.

- Quadratische Funktionen
- „Abschneiden“ von Polynomfunktionen
- Lineare Funktionen
- Differentialrechnung für Polynomfunktionen
- Extremwertaufgaben für Polynomfunktionen

Beispiel

Der Umfang eines Rechtecks beträgt 80 cm. Mit welcher Länge und Breite ist die Fläche des Rechtecks möglichst groß ?

Seitenlängen a, b cm
Umfang: $2a + 2b = 80$ cm, also $b = 40 - a$ cm
Fläche: $a \cdot b = a \cdot (40 - a)$ cm^2

Suche Maximumstelle der Funktion F mit $F(a) = -a^2 + 40a$.

$$F(a) = -a^2 + 40a = -(a^2 - 40a) =$$

$$= -\Big((a - 20)^2 - 400\Big) = -(a - 20)^2 + 400.$$

Der Funktionswert $F(20) = 400$ ist der größtmögliche, weil bei Funktionswerten $F(a) = -(a - 20)^2 + 400$ an anderen Stellen a von 400 eine positive Zahl subtrahiert wird.

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktion: $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,
$ax^2 + bx + c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, z \longmapsto az^2 + bz + c\,,$

- Scheitelform durch quadratisches Ergänzen:
$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$
$a((x - \frac{(-b)}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a(x - s)^2 + t$

- $(ax^2 + bx + c)(s) = t, \quad (s, t)$ Scheitel
- $z \in \mathbb{R} : (ax^2 + bx + c)(z) = a(z - s)^2 + t \geq t$, wenn $a > 0$, und $\leq t$, wenn $a < 0$.

- Daher: $ax^2 + bx + c$ hat in s ein absolutes Minimum bzw. Maximum, wenn $a > 0$ bzw. $a < 0$ ist.

Quadratische Funktionen

p, q reelle Zahlen

- Scheitelform von $x^2 + px + q$:
  $(x - s)^2 + t = x^2 - 2s \cdot x + s^2 + t$, also $s = -\frac{p}{2}$
  und $t = q - s^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

- Nullstellen von $(x - s)^2 + t$:
  $s \pm \sqrt{-t} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

- Graph von $(x - s)^2 + t$ aus Graph von x^2 durch Addition von (s, t).

Auswerten einer Polynomfunktion in $0 \in \mathbb{R}$

- $f := 1 + 3x - 20x^2 + x^4$ Polynomfunktion vom Grad 4
- $g := 1 + 3x$ Polynomfunktion vom Grad ≤ 1 (lineare Funktion)
- Auswerten in 0 und $0,0010$ und Runden auf die 4. Stelle nach dem Komma:
  $f(0) = 1 = g(0)$ und $f(0,0010) = 1,0030 = g(0,0010)$.
- „Für sehr kleine Zahlen (Zahlen, die sehr nahe bei 0 liegen) sind die Funktionswerte von f und g (fast) gleich."
- Begründung: $f(t) = g(t) + t^2 \cdot (t^2 - 20)$
- $f = f(0) + 3x + x^2 \cdot (\ldots)$
  $f'(0) := 3$ „ Ableitung von f an der Stelle 0 "
  Dann:
  $$f = f(0) + f'(0)x + x^2 \cdot u_0$$
  (u_0 Polynomfunktion)

Auswerten einer Polynomfunktion in $a \in \mathbb{R}$

- $f := 1 + 3x - 20x^2 + x^4$ Polynomfunktion, a reelle Zahl
- Durch (2-malige) Division mit Rest von f durch $x - a$ oder durch Ersetzen von x durch (x-a)+a, Ausmultiplizieren und Zusammenfassen:
  $f = f(a) + c_a \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot u_a$ (u_a Polynomfunktion)
- „Für Zahlen, die sehr nahe bei a liegen, sind die Funktionswerte von f und $f(a) + c_a \cdot (x - a)$ (fast) gleich."
- $f'(a) := c_a$ „ Ableitung von f an der Stelle a "
  Dann:
  $$f = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)^2 \cdot u_a$$
- Für $a = 1$: $f = -15 - 33(x - 1) + (x - 1)^2 \cdot (-17 + 2x + x^2)$.

Zusammenhang mit Differentialquotient der Analysis

- $a \in \mathbb{R}$, f Polynomfunktion
- $f = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)^2 \cdot u_a$
- Für alle $t \in \mathbb{R}$ daher:
  $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + (t-a)^2 \cdot u_a(t)$
- Für $t \neq a$: $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a) + (t-a) \cdot u_a(t)$
- $\lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a) + \lim_{t\to a}(t-a) \cdot \lim_{t\to a} u_a(t) = f'(a)$
- $f = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)^2 \cdot u_a$ ist die
  Taylorentwicklung von f an der Stelle a bis zum Grad 1.
  Berechnung durch Division mit Rest von f durch $x-a$.

Lineare Funktionen

Zu je 2 reellen Zahlen k und d erhält man eine *lineare Funktion*

$$kx + d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ z \longmapsto kz + d\,.$$

- Wenn $d = 0$ ist, dann ist die lineare Funktion *homogen*.
- f lineare Funktion: $d = f(0)$ und $k = f(1) - d = f(1) - f(0)$.
- x ist die identische Funktion, kx das k-fache davon und d die konstante Funktion, die jeder reellen Zahl z die Zahl d zuordnet.

Der Graph einer linearen Funktion

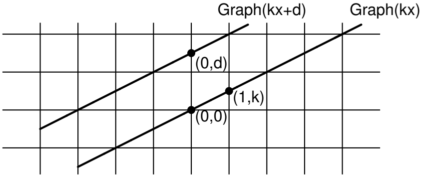
Graph einer Funktion g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:

$$\{\,(a, g(a)) \mid a \in \mathbb{R}\,\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Graph von $kx + d$:

$$\{\,(a, ka + d) \mid a \in \mathbb{R}\,\} = \{\,(0, d) + a(1, k) \mid a \in \mathbb{R}\,\},$$

Gerade durch $(0, d)$, die parallel zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, k)$ (das ist der Graph von kx) ist.



Eigenschaften linearer Funktionen

k und d seien reelle Zahlen.

- $kx + d$ monoton fallend $\Leftrightarrow k < 0$
- $kx + d$ monoton wachsend $\Leftrightarrow k > 0$
- $kx + d$ hat ein Maximum oder Minimum an der Stelle $a \Leftrightarrow k = 0$

Polynomfunktionen

- $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto z$, identische Funktion
- $x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto z^n$, n-te Potenzfunktion
- Polynomfunktion: = Linearkombination von Potenzfunktionen
  $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$,
  $c_0, \ldots, c_n$ reelle Zahlen.

- Für $a \in \mathbb{R}$:
  $f = f(a) + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \ldots + d_n(x-a)^n$,

- Definition: $f'(a) := d_1$, Ableitung von f an der Stelle a.
- Definition: $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f'(a)$, Ableitung von f
- Tangente an Graph(f) in $(a, f(a))$: = Graph von $f(a) + f'(a)(x-a)$

Differentialrechnung für Polynomfunktionen

- Einfach nachzurechnen: $(f+g)' = f' + g'$, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

- $x^n = ((x-a)+a)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}(x-a) + (x-a)^2(\ldots)$, also ist

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

- $(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n)' = c_1 + 2c_2 x + \ldots n c_n x^{n-1}$

Differentialrechnung für Polynomfunktionen

In einer kleinen Umgebung von a sind f und $f(a) + f'(a)(x - a)$ fast nicht zu unterscheiden, daher „ erbt " f dort die Eigenschaften der linearen Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$:

- $f'(a) > 0 \Leftrightarrow f(a) + f'(a)(x - a)$ monoton wachsend $\Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von a monoton wachsend
- $f'(a) < 0 \Leftrightarrow f(a) + f'(a)(x - a)$ monoton fallend $\Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von a monoton fallend
- Wenn f ein Maximum oder Minimum an der Stelle a hat, dann muss $f'(a) = 0$ sein.
- Der Graph von f sieht in einer kleinen Umgebung jedes Punktes wie ein Stück einer Geraden aus.

Extremwertaufgaben

f Polynomfunktion, $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 0$

$$f = f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + d_n (x-a)^n$$

Gute Beschreibung durch quadratische Funktion

$$f(a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

(in Scheitelform)

Maximum, wenn $f''(a) < 0$
Minimum, wenn $f''(a) > 0$

Danke für die Aufmerksamkeit!
http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at