Lineare (Un-)Gleichungen und lineare Optimierung

Franz Pauer

Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2010
9. April 2010

Eine „Maximumsaufgabe“

Eine Firma stellt aus 3 Rohstoffen A, B, C zwei Produkte P, Q her.
Von A, B, C sind 28, 32, 40 Tonnen verfügbar.
Für je ein Stück von P bzw. Q werden gebraucht:

	A	B	C
P	1kg	2kg	5kg
Q	4kg	4kg	2kg

Der Gewinn für ein Stück von P bzw. Q ist 4 bzw. 5 Euro.

Wieviele Stück von P und von Q soll die Firma produzieren, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen?

Eine „Maximumsaufgabe“

- Gesucht: $(p, q) \in \mathbb{R}^2$
  (p bzw. q Stück von P bzw. Q sollen hergestellt werden)

- Bedingungen, die p und q erfüllen müssen:
  - $p + 4q \leq 28000,\ 2p + 4q \leq 32000,\ 5p + 2q \leq 40000,$
    $p \geq 0,\ q \geq 0$ $\quad$ ((p, q) liegt im „zulässigen Bereich“).
  - Gewinn soll möglichst groß sein,
    $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ „Zielfunktion“, $G(x, y)$ ist Gewinn bei Produktion von x Stück von P und y Stück von Q.

- Annahme: G linear (nicht immer sinnvoll !),
  dann: $G(x, y) = 4x + 5y$ $\quad$ („lineare Optimierung“!)

Inhalt

- Lineare Gleichungen
- Lineare Ungleichungen
- Lineare Funktionen
- Lineare Optimierung ($n = 2$, graphische Lösung)

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind drei reelle Zahlen a, b und c, wobei mindestens eine der Zahlen a, b nicht 0 ist.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung" der Lösungsmenge

$$L(a, b; c) := \{(x, y) \mid ax + by = c\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Kurzschreibweise: „die Gleichung $ax + by = c$"

„Gute Beschreibung": $L(a, b; c)$ ist unendliche Menge, beschreibe sie durch endlich viele Daten!

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Die folgenden zwei Beobachtungen sind einfach zu überprüfen, aber wichtig:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$ax + by = c$$

dann erhält man alle Lösungen, indem man zu dieser alle Lösungen von $ax + by = 0$ addiert.

(2) Ist (u, v) eine Lösung von

$$ax + by = 0$$

und ist t eine Zahl, dann ist auch $t \cdot (u, v)$ eine Lösung.

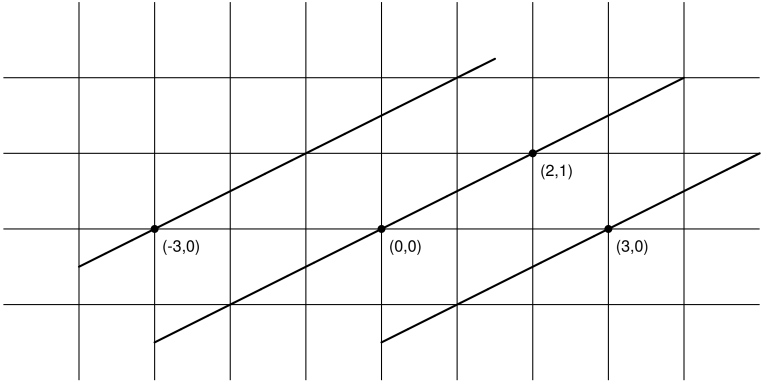
Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

- $(-b, a)$ ist Lösung von $ax + by = 0$, daher auch alle Vielfachen davon
- alle Lösungen von $ax + by = 0$ sind Vielfache von $(-b, a)$
- Also: $L(a, b; 0) = \mathbb{R} \cdot (-b, a)$
  Gerade durch $(0, 0)$ und $(-b, a)$.
- Falls $a \neq 0$ bzw. $b \neq 0$: $(c/a, 0)$ bzw. $(0, c/b)$
  ist Lösung von $ax + by = c$.
- Also:
  $$L(a, b; c) = (r, s) + \mathbb{R} \cdot (-b, a) \,,$$
  wobei $(r, s) = (c/a, 0)$ oder $(r, s) = (0, c/b)$ ist.
  Gerade durch (r, s), die zu $\mathbb{R} \cdot (-b, a)$ parallel ist.

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Wichtig: Für alle Zahlen c, c' sind $L(a, b; c)$ und $L(a, b; c')$ zueinander parallele Geraden.

$$x - 2y = -3 \text{ bzw. } 0 \text{ bzw. } 3$$



Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

Eine lineare Ungleichung mit zwei Unbekannten ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind drei reelle Zahlen a, b und c, wobei mindestens eine der Zahlen a, b nicht 0 ist.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Lösungsmenge

$$L(a, b; \leq c) := \{(x, y) \mid ax + by \leq c\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Kurzschreibweise: „die Ungleichung $ax + by \leq c$“

„Gute Beschreibung“: $L(a, b; \leq c)$ ist unendliche Menge, beschreibe sie durch endlich viele Daten!

Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

Die folgenden drei Beobachtungen sind einfach, aber wichtig:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$ax + by = c$$

dann erhält man alle Lösungen von $ax + by \leq c$, indem man zu dieser alle Lösungen der Ungleichung $ax + by \leq 0$ addiert.

(2) Ist (u, v) eine Lösung von

$$ax + by \leq 0$$

und ist t eine nicht-negative Zahl, dann ist auch $t \cdot (u, v)$ eine Lösung.

(3) Die Summe von zwei Lösungen von

$$ax + by \leq 0$$

ist wieder eine Lösung.

Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

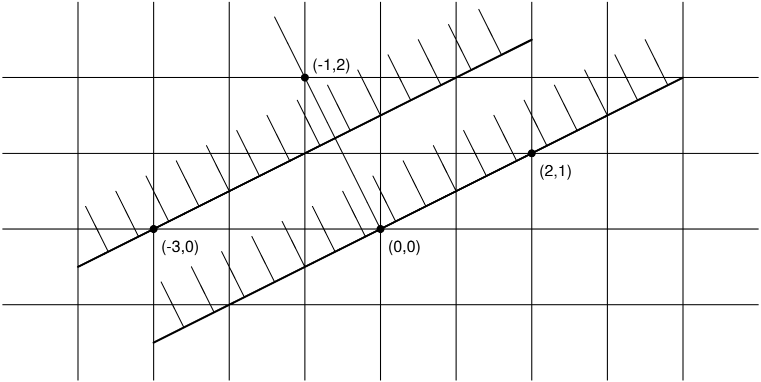
- Es ist $L(a, b; 0) \subseteq L(a, b; \leq 0)$ und $(-a, -b) \in L(a, b; \leq 0)$.
- Also: $L(a, b; \leq 0) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-a, -b) + \mathbb{R} \cdot (-b, a)$.
  Halbebene mit Rand $L(a, b; 0)$, die $(-a, -b)$ enthält.
- Daher: Ist $(r, s) \in L(a, b; c)$, dann ist

$$L(a, b; \leq c) = (r, s) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-a, -b) + \mathbb{R} \cdot (-b, a) .$$

  Halbebene mit Rand $L(a, b; c)$, die $(r, s) + (-a, -b)$ enthält.

Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

Lösungsmenge von $x - 2y \leq 0$ und von $x - 2y \leq -3$



Lineare Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist linear genau dann, wenn

- „der Funktionswert der Summe die Summe der Funktionswerte“ ($f(v + w) = f(v) + f(w)$) und
- „der Funktionswert des Vielfachen das Vielfache des Funktionswertes“ ($f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$) ist.

f ist eindeutig durch die Funktionswerte von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bestimmt: wenn $f(1, 0) = a$ und $f(0, 1) = b$ ist, dann ist

$$f(x, y) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot (0, 1) = ax + by\,.$$

Lineare Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, (x, y) \longrightarrow ax + by\,.$$

Niveaulinien (oder Urbilder) von f:
Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$f^{-1}(c) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\,\}$$

die Menge aller Paare in $\mathbb{R}^2$, deren Funktionswert unter f gleich c ist.
Nach dem Abschnitt über lineare Gleichungen: Die Niveaulinien von f sind zueinander parallele Geraden, insbesondere sind alle parallel zu

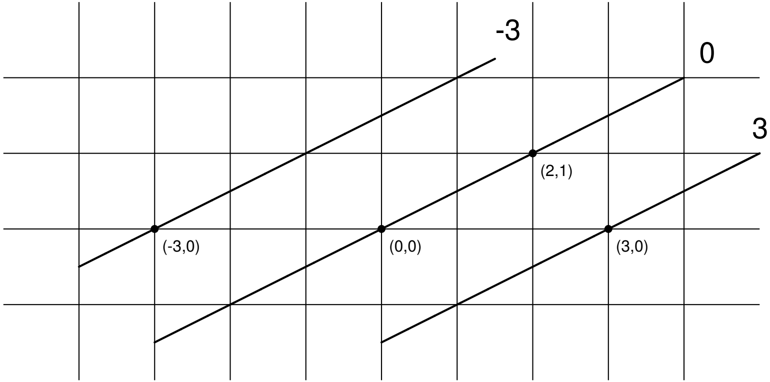
$$f^{-1}(0) = \mathbb{R} \cdot (-b, a)\,.$$

Lineare Funktionen

Drei Niveaulinien von $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \longmapsto x - 2y$

Urbilder von $-3, 0, 3$

$$x - 2y = -3 \text{ bzw. } 0 \text{ bzw. } 3$$



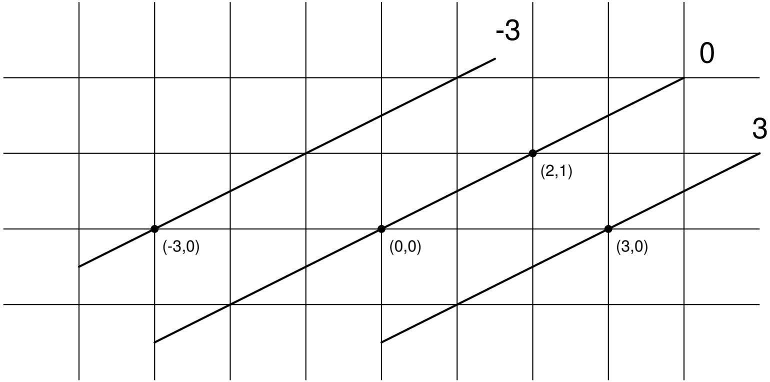
Lineare Funktionen

- Sei $f(v) > 0$ und $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Dann ist
  $$f(c \cdot v) = c \cdot f(v) < d \cdot f(v) = f(d \cdot v)\,.$$
  Also: verschiebt man die Gerade $f^{-1}(0)$ in Richtung eines Punktes mit positivem Funktionswert (bezüglich f), dann nimmt der Funktionswert der Punkte auf den (verschobenen) Geraden zu.
- Sei $f(v) < 0$ und $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Dann ist
  $$f(c \cdot v) = c \cdot f(v) > d \cdot f(v) = f(d \cdot v)\,.$$
  Also: verschiebt man die Gerade $f^{-1}(0)$ in Richtung eines Punktes mit negativem Funktionswert (bezüglich f), dann nimmt der Funktionswert der Punkte auf den (verschobenen) Geraden ab.

Lineare Funktionen

Drei Niveaulinien von $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \longmapsto x - 2y$
Urbilder von $-3, 0, 3$

$$x - 2y = -3 \text{ bzw. } 0 \text{ bzw. } 3$$



Lineare Optimierung

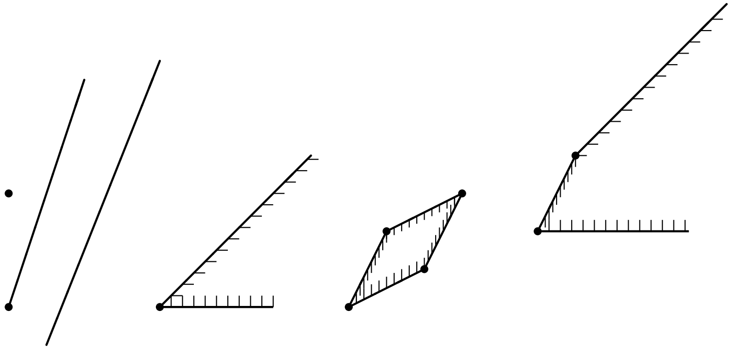
Ein lineares Programm auf $\mathbb{R}^2$ ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten und eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Gesucht ist ein „optimaler Punkt“ , das ist ein Zahlenpaar (x, y), das Lösung aller gegebenen linearen Ungleichungen ist und dessen Funktionswert größtmöglich (oder kleinstmöglich) ist.

Die Funktion f nennt man Zielfunktion, den Durchschnitt der Lösungsmengen aller linearen Ungleichungen nennt man den zulässigen Bereich.

Lineare Optimierung

Der zulässige Bereich ist also Durchschnitt von Halbebenen. Er kann leer, ein Punkt, eine Halbgerade, eine Gerade, ein spitzer Kegel, ein konvexes Vieleck oder die Summe eines spitzen Kegels und eines konvexen Vielecks sein.



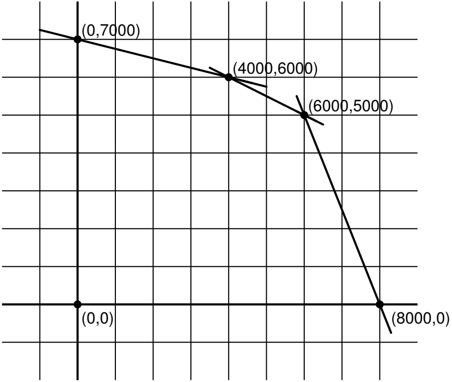
Lineare Optimierung

Ein optimaler Punkt kann graphisch wie folgt bestimmt werden:

- Für jede lineare Ungleichung $ax + by \leq c$ zeichne die Gerade
$$L(a, b; c) = \{\, (x, y) \mid ax + by = c \,\}$$
ein.
Wähle dann irgendeinen Punkt (u, v), der nicht auf dieser Geraden liegt, und berechne $au + bv$. Wenn diese Zahl kleiner als c ist, dann liegt dieser Punkt auf der Halbebene $L(a, b; \leq c)$. Sonst ist $L(a, b; \leq c)$ die andere durch $L(a, b; c)$ definierte Halbebene.

- Bestimme durch Zeichnung den Durchschnitt dieser Halbebenen, die Menge der zulässigen Punkte.
Falls sie leer ist, gibt es keinen optimalen Punkt.

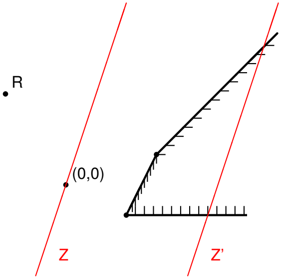
Lineare Ungleichungen, n=2, graphische Lösung



$$\begin{aligned} x + 4y &\leq 28000 \\ 2x + 4y &\leq 32000 \\ 5x + 2y &\leq 40000 \\ -x &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

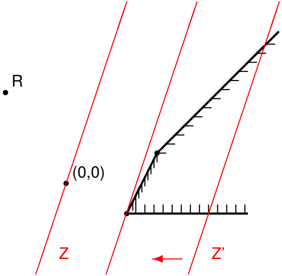
Lineare Optimierung

- Zeichne das Urbild von 0 bezüglich der Zielfunktion. Dieses ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$, wir nennen sie Z.
- Wir verschieben Z zunächst so, dass die verschobene Gerade Z' einen Punkt des zulässigen Bereichs enthält.
- Wähle einen Punkt R, dessen Funktionswert bezüglich der Zielfunktion positiv ist (o.E.d.A.: $f \neq 0$).



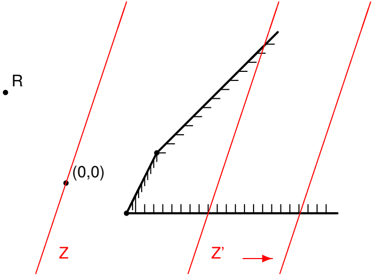
Lineare Optimierung

- Wenn wir ein Maximum suchen, dann verschieben wir Z' so lange in die Richtung von $(0,0)$ nach R, wie noch ein zulässiger Punkt auf der verschobenen Geraden liegt.
  - Falls das beliebig weit möglich ist, gibt es keinen optimalen Punkt.
  - Sobald das nicht mehr möglich ist, ist jeder Punkt des zulässigen Bereichs, der dann noch auf dieser Geraden liegt, ein optimaler Punkt.



Lineare Optimierung

- Wenn wir ein Minimum suchen, dann verschieben wir Z' in die andere Richtung und gehen analog vor.

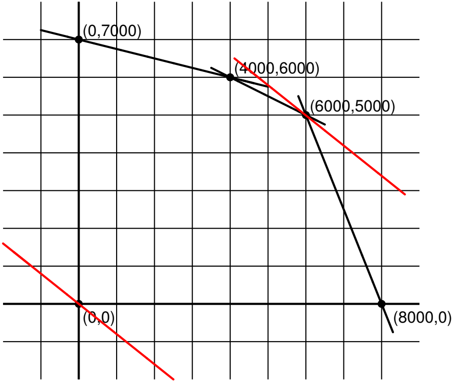


Lineare Optimierung

Damit auch gezeigt: Wenn es einen optimalen Punkt gibt, dann ist mindestens einer der Eckpunkte des zulässigen Bereichs ein optimaler Punkt.

Gilt auch für $n \geq 3$. Grundlage für den Simplexalgorithmus.

Lineare Optimierung (n=2, graphisch)



$$x + 4y \leq 28000$$
$$2x + 4y \leq 32000$$
$$5x + 2y \leq 40000$$
$$-x \leq 0$$
$$-y \leq 0$$
$$4x + 5y \text{ maximal}$$

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at