

Prüfungsfragen zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie für Lehramtsstudierende 2

Sommersemester 2013

- Erläutern sie, wie man die „Zeichenebene“ nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum betrachten kann. Wie beschreibt man dann eine Gerade in der Ebene?
- Erläutern sie, wie man die „Zeichenebene“ als affinen Raum betrachten kann. Wie beschreibt man dann eine Gerade in der Ebene? Was meint man mit „Richtungsvektor einer Geraden in der Ebene“?
- Was ist eine lineare Ungleichung? Wie kann man deren Lösungsmenge durch endlich viele Daten beschreiben?
- Welche Eigenschaften hat die Lösungsmenge eines Systems von *homogenen* linearen Ungleichungen? Durch welche endlich vielen Daten kann man diese Lösungsmenge beschreiben?
- Was ist ein „lineares Programm“? Wie löst man eine lineare Optimierungsaufgabe mit zwei Unbekannten graphisch?
- Was ist eine affine Funktion? Begründen sie, warum die Hintereinanderausführung von zwei affinen Funktionen wieder eine affine Funktion ist.
- Was ist die affine Hülle einer endlichen Teilmenge eines Vektorraums, was ist die konvexe Hülle einer solchen Menge? Wie kann man das Bild der affinen Hülle einer solchen Menge bezüglich einer affinen Funktion durch endlich viele Daten beschreiben?
- Was ist der Schwerpunkt einer endlichen Teilmenge eines Vektorraums? Was sind Schwerlinien eines Dreiecks? Begründen Sie: Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander im Schwerpunkt.
- Was ist der Schwerpunkt einer endlichen Menge von Vektoren? Begründen Sie: das Bild des Schwerpunktes einer endlichen Menge bezüglich einer affinen Funktion ist der Schwerpunkt der Bilder der Elemente dieser Menge. Welche Bedeutung hat das für die Berechnung von Symmetriegruppen?
- Was ist ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum? Geben Sie drei verschiedene Skalarprodukte auf dem Vektorraum \mathbf{R}^2 an.
- Erläutern Sie, warum man den Begriff Skalarbegriff als „Oberbegriff“ der Begriffe Abstand und Winkel betrachten kann.
- Beweisen Sie die Sätze von Pythagoras und von Thales in einem euklidischen Raum.

- Erläutern Sie, was mit „ein Vektor hat Betrag und Richtung“ gemeint ist. Hat jedes Element eines Vektorraums „Betrag und Richtung“?
- Was ist eine Orthonormalbasis eines euklidischen Raums? Wie berechnet man die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis?
- Erläutern Sie das Schmidt'sche Verfahren zur Berechnung einer Orthonormalbasis in einem euklidischen Raum. Geben Sie dabei sowohl eine rechnerische als auch geometrische Interpretation dieses Verfahrens an.
- Was ist der Fußpunkt des Lotes eines Punktes auf einen Untervektorraum eines euklidischen Raums? Wie kann er berechnet werden?
- Was ist eine Orientierung eines reellen Vektorraums? Was bedeuten die Linke-Hand-Regel und die Rechte-Hand-Regel im physikalischen Raum?
- Wie ist das Volumen eines Parallelotops in einem euklidischen Raum definiert? Wie berechnet man die Fläche eines von zwei Vektoren in einem euklidischen Raum erzeugten Parallelogramms?
- In welchen Vektorräumen ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) definiert? Definieren Sie es geometrisch und rechnerisch.
- Was ist euklidischer Raum? Was ist eine Isometrie eines euklidischen Raums? Welche Bedeutung hat dieser Begriff für die Beschreibung der Bewegungen von starren Körpern in Ebene und Raum?
- Welche Eigenschaften haben Isometrien eines euklidischen Raums? Wie kann man sie durch endlich viele Daten beschreiben?
- Was ist eine orthogonale Funktion? Was ist eine orthogonale Matrix? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen zwei Begriffen?
- Was ist die Determinante einer linearen Funktion? Was weiß man über die Determinante einer orthogonalen Funktion? Welche Eigenwerte kann eine orthogonale Funktion haben?
- Was ist eine Spiegelung? Wie einfach kann bei geschickter Wahl einer Basis die Matrix einer Spiegelung werden? Wie kann man eine Spiegelung mithilfe einer orthogonalen Projektion beschreiben?
- Was ist eine Gleitspiegelung? Wie stellt man fest, ob eine affine Funktion, deren linearer Anteil eine Spiegelung ist, eine Gleitspiegelung ist? Was ist diese affine Funktion, wenn sie keine Gleitspiegelung ist?

- Was muss in einem Vektorraum vorgegeben sein, dass man von orientierten Winkeln reden kann? Wie kann man diese Daten in der Ebene (nach Wahl eines Nullpunkts) vorgeben? Wie ist ein orientierter Winkel definiert?
- Was ist eine Drehung um den Nullpunkt? Was ist eine Drehmatrix? Wie hängen diese zwei Begriffe zusammen?
- Wie kann man die Isometrien der Ebene durch die Eigenschaften „Fixmenge“ und „orientierungserhaltend/orientierungsumkehrend“ beschreiben?
- Was ist eine komplexe Zahl? Was ist ihre Polardarstellung? Wie kann man die Multiplikation komplexer Zahlen verwenden, um Drehungen zu beschreiben?
- Durch welche Funktion wird eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω , Amplitude a und Anfangsphase b beschrieben? Zeigen Sie, dass die Überlagerung zweier gleichfrequenter harmonischer Schwingungen wieder eine solche ist.
- Was ist die Symmetriegruppe einer Teilmenge eines euklidischen Raumes? Wie kann man diese ermitteln?
- Was ist eine bilineare Funktion? Was ist eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum? Durch welche endlich vielen Daten kann diese beschrieben werden? Welche Beispiele bilinearer Funktionen sind im Schulunterricht von Bedeutung?
- Was ist eine symmetrische Bilinearform? Was ist die Matrix einer symmetrischen Bilinearform? Wie ändert sich diese bei Basiswechsel?
- Was sind Kongruenzumformungen von symmetrischen Matrizen? Beschreiben Sie bis auf Kongruenz alle symmetrischen reellen Matrizen.
- Wie überprüft man, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist? Was ist eine Gram'sche Matrix eines Skalarproduktes? Wie überprüft man, ob eine quadratische Matrix eine Gram'sche Matrix eines Skalarproduktes sein kann?
- Was ist eine quadratische Form? Was ist eine quadratische Funktion? Wie heißen die Nullstellenmengen von quadratischen Funktionen? Wie kann man diese darstellen? Wie ist die Matrix einer quadratischen Form definiert? Wie bedeutet es für diese quadratische Form, wenn man ihre Matrix kongruent umformt? Was ist eine affine Normalform einer quadratischen Funktion?