Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 für Lehramtsstudierende

Ein Skriptum zur Vorlesung
im Sommersemester 2013

Arne Dür und Franz Pauer

2. Auflage

Vorwort

Das vorliegende Skriptum soll den Hörerinnen und Hörern der Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 für Lehramtsstudierende“ im Sommersemester 2013 das Mitschreiben und *Mitdenken* in der Vorlesung erleichtern. Das Skriptum enthält alle Definitionen und Sätze der Vorlesung, aber nur wenige Beispiele dazu. In der Vorlesung werden die Definitionen und Sätze motiviert, der Zusammenhang mit früheren Ergebnissen erläutert und Beispiele dazu besprochen. Die gemeinsamen Inhalte der Skripten „Lineare Algebra 1“ von Kurt Girstmair (WS 12/13) und von Franz Pauer (WS 11/12) werden als bekannt vorausgesetzt. Einige davon werden zur Wiederholung noch einmal angeführt.

Im Kapitel 1 werden Systeme linearer Ungleichungen und - als Anwendung davon - lineare Optimierung mit zwei Unbekannten besprochen. Im Kapitel 2 werden die Bewegungen starrer Körper in der Ebene und im Raum beschrieben, dieses Thema ist für die Mechanik (und Robotik) von großer Bedeutung. Im Kapitel 3 geht es vor allem um quadratische Funktionen und ihre Nullstellenmengen, die Quadriken.

Dieses Skriptum umfasst (in leicht veränderter Form) Teile der folgenden Skripten:
Arne Dür und Franz Pauer: Lineare Algebra (5. Auflage), 2006.
Arne Dür und Franz Pauer: Analytische Geometrie (3. Auflage), 2005.
Franz Pauer: Lineare Optimierung (2. Auflage), 2003.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten (2012) durch Aufnahme einiger wiederholender Abschnitte und dafür Streichung einiger Abschnitte über lineare und multilineare Funktionen.

Innsbruck, Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Systeme linearer Ungleichungen

§1. Wiederholung: Zwei Zugänge zur Geometrie der Ebene

§1.1. Die Ebene (nach Wahl eines Nullpunktes) als Vektorraum. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie wir die Zeichenebene und den Anschauungsraum nach Wahl eines „Nullpunktes" in „natürlicher Weise" als Vektorraum betrachten können.

Wir nehmen an, wir haben ein „beliebig großes" Zeichenblatt E und die folgenden Zeichengeräte:

- einen „beliebig fein gespitzten" Bleistift,
- ein „beliebig langes" Lineal und
- ein Dreieck.

Wir betrachten das Zeichenblatt als Menge von „Punkten" und wählen einen davon aus. Diesen ausgewählten Punkt nennen wir *Nullpunkt* und bezeichnen ihn mit $0 \in E$.

Wir nehmen an, dass mit Lineal und Bleistift durch je zwei Punkte eine „Gerade" gezeichnet werden kann und dass mit Lineal, Dreieck und Bleistift jede Gerade in jeden Punkt „parallelverschoben" werden kann.

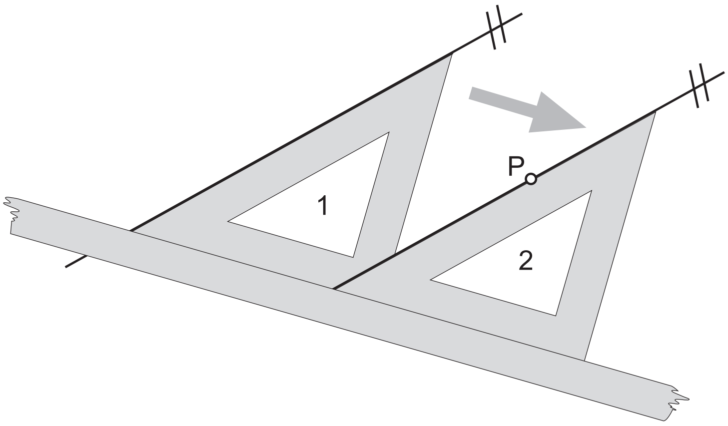


ABBILDUNG 1. Parallelverschieben

Je zwei Punkten $A, B \in E$ können wir wie folgt einen dritten Punkt, den wir mit $A + B$ bezeichnen, zuordnen:

- Falls $0, A$ und B nicht auf einer Geraden liegen:
  Zeichne eine Gerade durch 0 und B und verschiebe sie in den Punkt A. Zeichne eine Gerade durch 0 und A und verschiebe sie in den

Punkt B.
Dann sei $A+B$ der „Schnittpunkt“ dieser zwei Geraden.

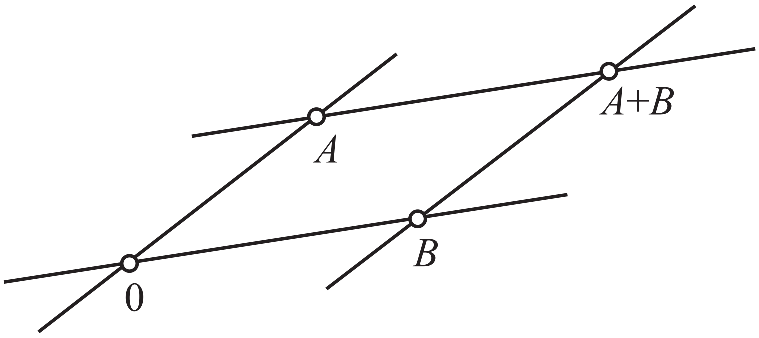


ABBILDUNG 2. Addieren von Punkten in allgemeiner Lage

- Falls $0, A$ und B auf einer Geraden liegen:
  Wähle einen Punkt $H \in E$, der nicht auf dieser Geraden liegt.
  Konstruiere wie oben die Punkte $A+H$ und $(A+H)+B$.
  Verschiebe die Gerade durch 0 und H in den Punkt $(A+H)+B$.
  Dann sei $A+B$ der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden durch 0 und A.

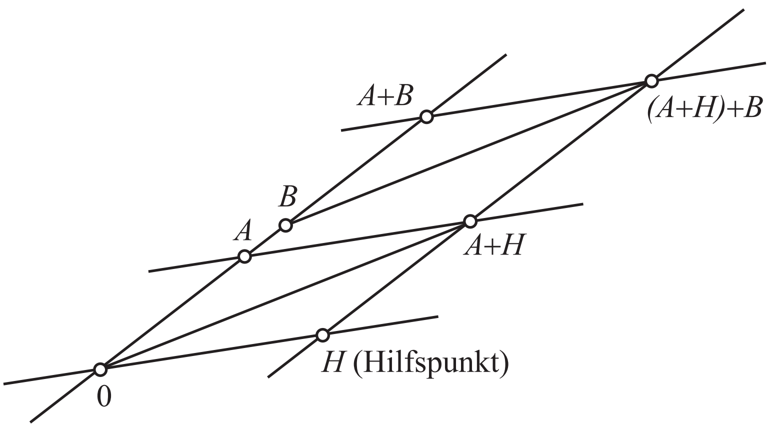


ABBILDUNG 3. Addieren von Punkten in spezieller Lage

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass das Lineal mit einer Skala versehen ist, aus der jede reelle Zahl abgelesen werden kann. Dann kann jeder reellen Zahl c und jedem Punkt $A \in E$ ein weiterer Punkt, den wir mit $c \cdot A$ bezeichnen, wie folgt zugeordnet werden:

- Zeichne mit dem Lineal eine Gerade durch 0, die den Punkt A nicht enthält.
- Lege das Lineal so, dass die Zahl 0 über dem Punkt 0 liegt und zeichne dann die Punkte P bzw. Q, über denen die Zahlen 1 bzw. c liegen, auf dieser Geraden ein.
- Verschiebe die Gerade durch A und P in den Punkt Q.
- Dann sei $c \cdot A$ der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden durch 0 und A.

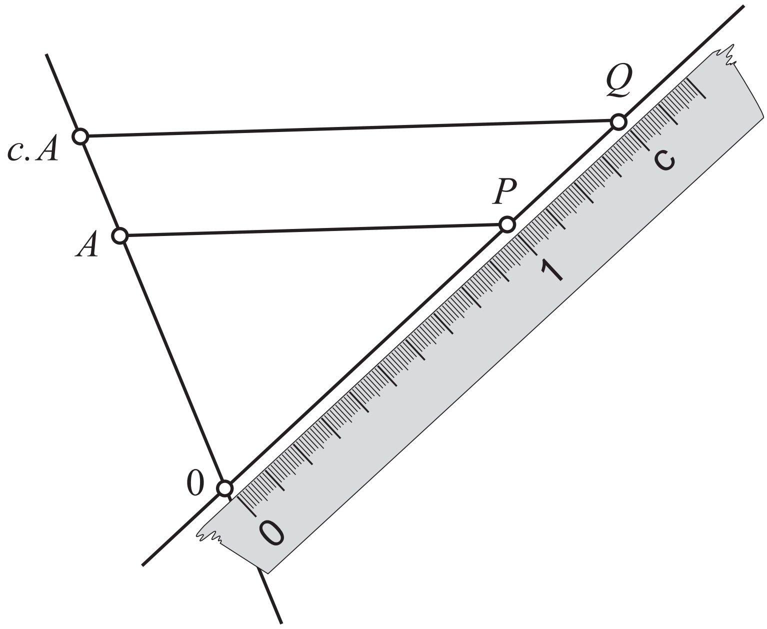
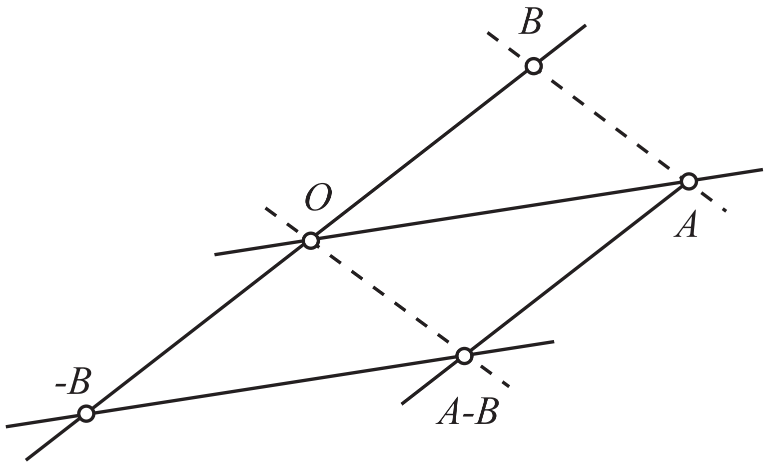


ABBILDUNG 4. Multiplikation von Punkten mit Zahlen

Wir nehmen an, dass die so definierten Rechenoperationen $+$ („Addition von Punkten“) und $\cdot$ („Skalarmultiplikation von reellen Zahlen mit Punkten“) die Rechenregeln eines Vektorraums erfüllen. Dann ist die Zeichenebene E ein Vektorraum und ihre Punkte sind Vektoren.

Zum zeichnerischen Subtrahieren zweier Punkte A und B beachte man, dass $(A-B)+B=A$ ist. Wir beschränken uns auf den Fall, dass 0, A und B nicht auf einer Geraden liegen.
Zeichne die Gerade durch 0 und B und verschiebe sie in den Punkt A. Zeichne die Gerade durch A und B und verschiebe sie in den Punkt 0. Dann ist der „Schnittpunkt“ dieser zwei Geraden jener Punkt, den man zu B addieren muss, um A zu bekommen, also $A-B$.

Alternativ könnte $A-B$ $(=A-(-B))$ auch durch Addition von A und $-B$ erhalten werden.



Differenz zweier Punkte A und B

ABBILDUNG 5. Differenz zweier Punkte

Es sei A ein von 0 verschiedener Punkt. Die Gerade durch 0 und A ist (nach Definition der Skalarmultiplikation) die Menge aller skalaren Vielfachen von A. Wenn die Punkte $0, A$ und B nicht auf einer Geraden liegen, dann ist das Punktepaar (A, B) eine $\mathbb{R}$-Basis des Vektorraums E. Wenn a bzw. b die Koordinaten eines Punktes P bezüglich dieser Basis sind, dann erhält man $a \cdot A$ (bzw. $b \cdot B$) als Schnittpunkt der Geraden $\mathbb{R} \cdot A$ mit der Geraden, die man erhält, indem man die Gerade durch 0 und B in den Punkt P verschiebt (bzw. als Schnittpunkt der Geraden $\mathbb{R} \cdot B$ mit der Geraden, die man erhält, indem man die Gerade durch 0 und A in den Punkt P verschiebt). Der Punkt P wird eindeutig durch das Zahlenpaar (a, b) beschrieben.

Die Wahl eines Nullpunktes 0 in der Ebene und von zwei Punkten A, B so, dass $0, A$ und B nicht auf einer Geraden liegen, nennt man auch *Wahl eines Koordinatensystems*. Man kann diese Wahl auch dadurch treffen, dass man ein Paar von Geraden, die genau einen Punkt gemeinsam haben, und auf jeder Geraden einen Punkt, der nicht der Schnittpunkt ist, wählt. Der Schnittpunkt ist dann der Nullpunkt und das Paar der auf den Geraden gewählten Punkte ist die Basis.

Analog kann der Anschauungsraum nach Wahl eines Nullpunktes 0 in natürlicher Weise als Vektorraum betrachtet werden. Wir nehmen dazu an, dass drei Punkte $0, A, B$ jeweils in einer „Ebene“ liegen und definieren dann $A + B$ und $c \cdot A$ wie oben. Wenn die Punkte 0, A, B und C nicht in einer Ebene liegen, dann ist das Punktetripel (A, B, C) eine $\mathbb{R}$-Basis dieses Vektorraums.

§1.2. Die Ebene als affiner Raum.

Definition 1 : Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, A eine Menge und

$$V \times A \to A\,,\ (v,a) \mapsto v \cdot a\,,$$

eine Operation der Gruppe $(V,+)$ auf A. (Also: Für alle $a \in A$, $v,w \in V$ ist $0 \cdot a = a$ und $(v+w) \cdot a = v \cdot (w \cdot a)$.
A zusammen mit dieser Operation ist ein *affiner Raum über* V, wenn es für alle Elemente $a,b \in A$ genau einen Vektor $v \in V$ gibt mit $v \cdot a = b$.
Die Elemente von A heißen dann *Punkte*, die Elemente von V *Vektoren* des affinen Raums.

Satz 2 : *Sei A ein affiner Raum über V und $a \in A$. Die Funktion*

$$V \longrightarrow A\,,\ v \longmapsto v \cdot a\,,$$

ist bijektiv. (Nach Wahl eines „Nullpunktes“ kann ein affiner Raum als Vektorraum betrachtet werden).

Beweis: Folgt aus der Definition.

Sie E die Zeichenebene $T(E)$ der Vektorraum der Translationen von E. Dann ist E mit

$$T(E) \times E \longrightarrow E\,,\ (t,x) \longmapsto t(x)\,,$$

ein affiner Raum über $T(E)$.
Möchte man in der Zeichenebene keinen „Nullpunkt“ wählen, kann man sie als affinen Raum betrachten. Dann muss man zwischen Punkten ($\in E$) und Vektoren ($\in T(E)$) unterscheiden. Punkte können dann nicht addiert werden, aber Vektoren können addiert werden und auf Punkten „wirken“.

Sind P und Q Punkte von E und $P \neq Q$, dann gibt es genau eine Translation in $T(E)$, die P auf Q abbildet. Sie wird häufig mit $\vec{PQ}$ bezeichnet. Die Menge

$$\{t\vec{PQ}\,|\,t \in \mathbb{R}\} \subseteq T(E)$$

ist die Gerade durch $0_{T(E)} = id_E$ und $\vec{PQ}$ in $T(E)$. Die Gerade durch P und Q in E ist dann als

$$\{(t\vec{PQ})(P)\,|\,t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$$

definiert. Wegen $(\vec{PQ})(P) = Q$ und $(0 \cdot \vec{PQ})(P) = id_E(P) = P$ sind P und Q Punkte dieser Geraden. Die Translation $\vec{PQ}$ wird als „Richtungsvektor“ dieser Geraden bezeichnet.

§2. Lineare Ungleichungen und Halbräume

In diesem Abschnitt seien n eine positive ganze Zahl, V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $V^* := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller linearen Funktionen von V nach $\mathbb{R}$. Mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die nicht negativ sind.

Definition 3: Eine *lineare Ungleichung* in V ist durch eine lineare Funktion $0 \neq f \in V^*$ und eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht sind alle Vektoren $v \in V$ mit

$$f(v) \leq b.$$

Die Menge $L(f, \leq b) := \{v \in V \mid f(v) \leq b\}$ heißt *Lösungsmenge* der durch f und b gegebenen linearen Ungleichung, die Elemente von $L(f, \leq b)$ sind *Lösungen* dieser Ungleichung.

Die durch $0 \neq f \in V^*$ und $b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Ungleichung ist *homogen*, wenn $b = 0$ ist.

Sei $L(f, \geq b) := \{v \in V \mid f(v) \geq b\}$. Dann ist

$$L(f, \geq b) = L(-f, \leq -b)$$

die Lösungsmenge der durch $-f$ und $-b$ gegebenen linearen Ungleichung.

Beispiel 4: Sei $V := \mathbb{R}^{n\times 1}$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x_i .$$

Dann ist $L((a_0, a_1, \ldots, a_n), \leq b) := L(f, \leq b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \leq b\}$.

Satz 5: *Sei $0 \neq f \in V^*$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann kann $L(f, \leq b)$ wie folgt durch endlich viele Daten beschrieben werden:*

> *Berechne eine Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von* $\mathrm{Kern}(f)$ *und v_n so, dass $f(v_n) = 1$ ist.*

Dann ist

$$L(f, \leq b) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},\ c_n \leq b \Big\}.$$

Beweis: Das $n-$Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

$\subseteq$: Sei $v := \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in V$ und $f(v) \leq b$. Dann ist

$$b \geq f(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i) = c_n \ .$$

$\supseteq$: Seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $c_n \leq b$. Wegen

$$f\big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\big) = c_n f(v_n) \leq b$$

ist $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in L(f, \leq b)$.

Beispiel 6 : Sei V der 3-dimensionale Vektorraum aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 0, 1 oder 2, $b := 1$ und f die lineare Funktion

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t.$$

Dann bilden

$$\begin{aligned} v_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t - \frac{1}{2}, \quad \text{und} \\ v_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

eine $\mathbb{R}$-Basis von Kern(f). Für

$$v_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 1$$

ist $f(v_3) = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} &L(f, \leq 1) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \leq 1\} = \\ &= \big\{g \in V \mid g(t) = c_2t^2 + c_1t + (c_3 - \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{2}c_1),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ c_3 \leq 1\big\}. \end{aligned}$$

Beispiel 7 : Sei $V := \mathbb{R}^4$, $b := 2$ und

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Dann ist $\big((1,0,0,-1), (1,0,-1,0), (1,-1,0,0)\big)$ eine Basis von Kern(f) und $f\big((0,0,0,1)\big) = 1$. Also ist

$$L(f, \leq 2) = \{(c_1 + c_2 + c_3, -c_3, -c_2, -c_1 + c_4) \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R},\ c_4 \leq 2\}.$$

Definition 8 : Für $v, w \in V$ sei

$$[v, w] := \{sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R},\ s, t \geq 0,\ s + t = 1\}$$

die Strecke zwischen v und w.

Definition 9 : Es seien H eine Hyperebene in V (d. h.: ein affiner Unterraum von V der Dimension $n - 1$) und $w \in V \setminus H$. Dann ist

$$\big\{v \in V \mid [v, w] \cap H \subseteq \{v\}\big\}$$

der durch H und w gegebene *Halbraum*. Die Hyperebene H ist der *Rand* dieses Halbraums. Wenn $n = 2$ ist, nennt man einen Halbraum *Halbebene*. Deren Rand ist eine Gerade.

Satz 10: *Jeder Halbraum in V ist die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung.*

Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung ist ein Halbraum.

Eine lineare Ungleichung ist genau dann homogen, wenn 0 *ein Element des Randes ihrer Lösungsmenge ist.*

Beweis: Es seien H eine Hyperebene in V und $w \in V \setminus H$. Wähle eine lineare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ so, dass der Untervektorraum $\mathrm{Kern}(f)$ zu H parallel ist. Dann gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(H) = \{b\}$ ist. Wenn $f(w) > b$ ist, ersetze f durch $-f$ und b durch $-b$. Dann ist $f(w) < b$ und $L(f, \leq b)$ ist der durch H und w gegebene Halbraum.

Sei nun durch $0 \neq g \in V^*$ und $c \in \mathbb{R}$ eine lineare Ungleichung gegeben. Dann ist $L(g, \leq c)$ der durch $g^{-1}(c)$ und ein Element von $g^{-1}(c-1)$ gegebene Halbraum.

Die Aussage über homogene lineare Ungleichungen prüft man nun leicht nach.

Definition 11: Sei k eine positive ganze Zahl. Ein *System von k linearen Ungleichungen* ist durch lineare Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in V^*$ und reelle Zahlen $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht sind alle Vektoren $v \in V$ mit

$$f_1(v) \leq b_1, \ldots, f_k(v) \leq b_k.$$

Die *Lösungsmenge* des Systems ist

$$L(f_1, \ldots, f_k, \leq b_1, \ldots, \leq b_k) := \{v \in V \mid f_1(v) \leq b_1, \ldots, f_k(v) \leq b_k\}.$$

Es ist

$$L(f_1, \ldots, f_k, \leq b_1, \ldots, \leq b_k) = \bigcap_{i=1}^{k} L(f_i, \leq b_i),$$

also ist $L(f_1, \ldots, f_k, \leq b_1, \ldots, b_k)$ der Durchschnitt von k Halbräumen.

Definition 12: Ein *Polyeder in V* ist der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen in V.

Nach Satz 10 ist jedes Polyeder in V die Lösungsmenge eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen.

Wenn $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, dann werden die linearen Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in V^*$ eindeutig durch die n-Tupel $\big(f_i(v_1), \ldots, f_i(v_n)\big) \in \mathbb{R}^n$ beschrieben, $1 \leq i \leq k$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ definiert durch $A_{ij} := f_i(v_j)$. Für $b \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ sei

$$L(A, \leq b) := \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid Ax \leq b\}.$$

Dann ist $L(f_1, \ldots, f_k, \leq b_1, \ldots, b_k) = \{\underline{v}x \mid x \in L(A, \leq b)\}$.

Beispiel 13 : Die Aufgabe "Finde alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 &\geq 1, \\ \text{und } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \text{ "} \end{aligned}$$

ist System linearer Ungleichungen, weil die Menge dieser $x \in \mathbb{R}^4$ gleich $L(A, \leq (2, -1, 1, -1)^T)$ ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

("Jedes System von linearen Gleichungen und Ungleichungen kann in ein System der Form $Ax \leq b$ umgeschrieben werden").

Definition 14 : Eine nichtleere Teilmenge L von V heißt *Kegel (in V)*, wenn jede nichtnegative Linearkombination von Elementen in L wieder in L liegt, d. h.: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$, $v_0, \ldots, v_\ell \in L$, $c_0, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist
$c_0 v_0 + \cdots + c_\ell v_\ell \in L$.

Für $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_0, \ldots, v_\ell \in V$ heißt die Menge

$$\mathcal{K}(v_0, \ldots, v_\ell) := \Big\{ \sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i \mid c_0, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Big\}$$

der von $v_0, \ldots, v_\ell$ erzeugte Kegel. Ein Kegel L ist *endlich erzeugt*, wenn es $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_0, \ldots, v_\ell \in V$ gibt, so dass $L = \mathcal{K}(v_0, \ldots, v_\ell)$.

Beispiel 15 : Sei $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$ und $0 \neq v \in V$. Dann gibt es in V genau vier Kegel und zwar $\{0\}$, $\mathcal{K}(v)$, $\mathcal{K}(-v)$ und V.

Beispiel 16 : Lösungsmengen von Systemen homogener linearer Ungleichungen sind Kegel.

Beispiel 17 : Sei $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ und L ein Kegel in V mit
$\{0\} \neq L \neq V$. Dann gibt es eine Basis (v_1, v_2) von V so, dass $L = \mathcal{K}(v_1)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1, -v_1)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1, v_2)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1, v_2, -v_1)$ ist.

Beispiel 18 : Die Menge

$$\{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \leq z_3^2, z_3 \geq 0\}$$

ist ein Kegel in $\mathbb{R}^3$, aber nicht endlich erzeugt.

Definition 19 : Eine Teilmenge M von V ist *konvex*, wenn für je zwei Elemente $v, w \in M$ auch die Strecke $[v, w]$ in M enthalten ist.

Beispiel 20 : Polyeder, also Lösungsmengen von Systemen linearer Ungleichungen, sind konvex.

§3. Lineare Optimierung mit zwei Unbekannten

Beispiel 21 : Eine Firma stellt aus 3 Rohstoffen A, B und C zwei Produkte P und Q her.
Von A bzw. B bzw. C sind 28 bzw. 32 bzw. 40 Tonnen verfügbar.
Für je ein Stück von P bzw. Q werden gebraucht:

	A	B	C
P	1kg	2kg	5kg
Q	4kg	4kg	2kg

Der Gewinn für ein Stück von P bzw. Q beträgt 4 bzw. 5 Euro.

Wie viele Stück von P und von Q soll die Firma produzieren, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen?

Um diese Aufgabe mathematisch zu modellieren, legen wir zuerst fest, was wir suchen. Gesucht sind zwei Zahlen: die Stückzahlen von Produkt P und von Produkt Q. Dann lesen wir aus dem Text ab, welche Bedingungen diese Zahlen erfüllen sollen. Weiters müssen wir Annahmen über die „Gewinnfunktion“ treffen. Also:

- *Gesucht* ist ein Zahlenpaar $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, dabei gibt p bzw. q an, wieviele Stück von P bzw. Q hergestellt werden sollen.
- Dieses Zahlenpaar (p, q) muss die folgenden *Bedingungen* erfüllen :
  - $p + 4q \leq 28000$, $2p + 4q \leq 32000$, $5p + 2q \leq 40000$,
    weiters $p \geq 0$ und $q \geq 0$, weil p und q als Stückzahlen nicht negativ sein können.
    Die Menge der Zahlenpaare (p, q), die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir den *zulässigen Bereich* dieser Optimierungsaufgabe.
  - Der Gewinn soll möglichst groß sein, d.h.: wenn wir mit G die Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnen, die jedem Zahlenpaar (x, y) den Gewinn (in Euro) bei Produktion von x Stück von P und y Stück von Q zuordnet, dann soll für alle (x, y) aus dem zulässigen Bereich
    $G(x, y) \leq G(p, q)$ sein.

- Wenn wir annehmen, dass die Funktion G linear ist, dann ist $G(x,y) = 4x+5y$ für alle Zahlenpaare (x,y), also soll das Zahlenpaar (p,q) im zulässigen Bereich so gewählt werden, dass $4p+5q$ größtmöglich ist.

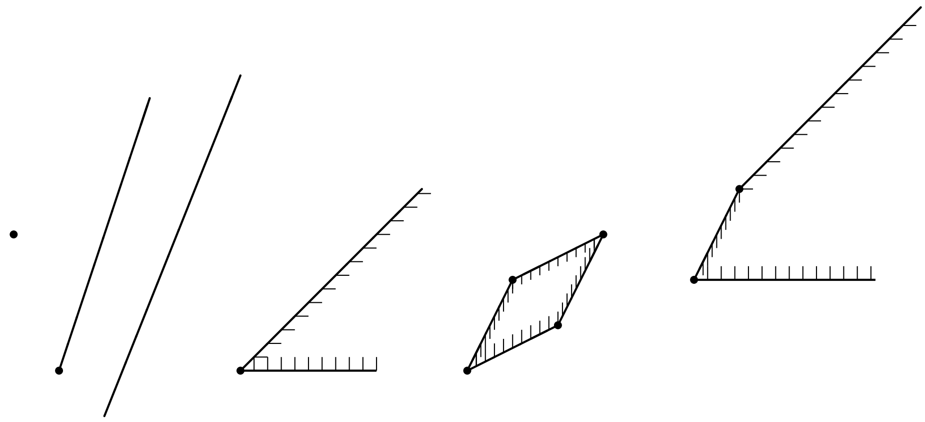
Ist die Annahme, dass die Gewinnfunktion linear ist, sinnvoll? Diese Annahme bedeutet, dass sich der Gewinn verdoppelt, verdreifacht, ... , wenn man die Produktion verdoppelt, verdreifacht, ... Jede Firma weiß, dass das in der Regel nicht der Fall ist. Wenn der Markt mit einem Produkt „überschwemmt“ wird, verfällt der Preis. Wenn die Gewinnfunktion linear ist, dann muss der Gewinn bei gleichzeitiger Produktion von p Stück von P und q Stück von Q die Summe der Gewinne nach der Produktion von p bzw. q Stück von P bzw. Q sein. Auch das ist nicht immer so. Wenn die Kunden zum Beispiel das Produkt P besser als das Produkt Q empfinden, dann kann die Produktion von P den Absatz von Q beeinträchtigen.

Die Annahme, dass die Gewinnfunktion linear ist, ist jedoch unter gewissen Umständen sinnvoll. Zum Beispiel, wenn die Abnahme der Produkte von vorneherein gesichert ist. Oder, wenn nur kleine Veränderungen der Produktion geplant sind. Die Annahme, dass der Gewinn um 2 Prozent steigt, wenn die Produktion um 2 Prozent erhöht wird, scheint realistisch zu sein.

Definition 22 : Ein *lineares Programm* auf $\mathbb{R}^2$ ist die folgende Aufgabe:

- *Gegeben* sind endlich viele lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten und eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Die Funktion f nennt man *Zielfunktion*, den Durchschnitt der Lösungsmengen aller linearen Ungleichungen nennt man den *zulässigen Bereich*.
- *Gesucht* ist ein *optimaler Punkt*, das ist ein Zahlenpaar im zulässigen Bereich mit größtmöglichem (oder kleinstmöglichem) Funktionswert bezüglich f.

Nach §2 ist der zulässige Bereich Durchschnitt von Halbebenen. Er kann leer, ein Punkt, eine Halbgerade, eine Gerade, eine Halbebene, ein spitzer Kegel (in der Ebene), ein konvexes Vieleck oder die Summe eines spitzen Kegels (in der Ebene) und eines konvexen Vielecks sein.



Ein optimaler Punkt kann *graphisch* wie folgt bestimmt werden:

- Für jede lineare Ungleichung $ax+by \leq c$ zeichne die Gerade

$$L((a,b),c) = \{\,(x,y)\,|\,ax+by=c\,\}$$

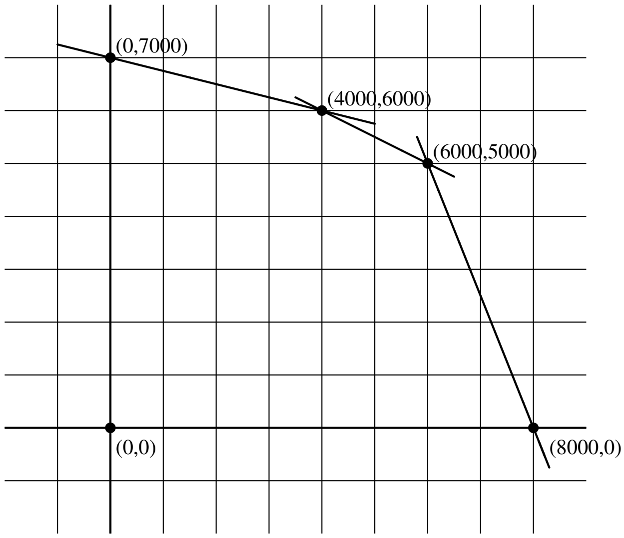
  ein.
  Wähle dann irgendeinen Punkt (u,v), der nicht auf dieser Geraden liegt, und berechne $au+bv$. Wenn diese Zahl kleiner als c ist, dann liegt dieser Punkt auf der Halbebene $L((a,b),\leq c)$. Sonst ist $L((a,b),\leq c)$ die andere Halbebene.

- Bestimme durch Zeichnung den Durchschnitt dieser Halbebenen, den zulässigen Bereich.
  Falls er leer ist, gibt es keinen optimalen Punkt. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass der zulässige Bereich nicht leer ist.

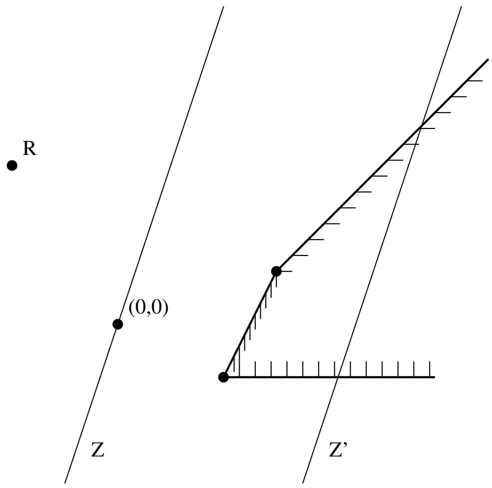
Beispiel: Als Lösungsmenge des Systems

$$\begin{aligned} x+4y &\leq 28000 \\ 2x+4y &\leq 32000 \\ 5x+2y &\leq 40000 \\ -x &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

linearer Ungleichungen erhalten wir den folgenden umrandeten Bereich:

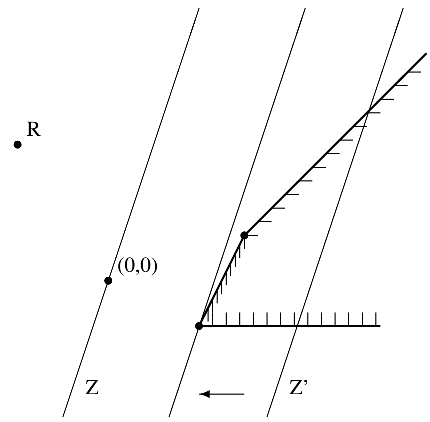


- Zeichne das Urbild von 0 bezüglich der Zielfunktion. Dieses ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$, wir nennen sie Z.
- Wir verschieben Z zunächst so, dass die verschobene Gerade Z' einen Punkt des zulässigen Bereichs enthält.
- Wähle einen Punkt R, dessen Funktionswert bezüglich der Zielfunktion positiv ist (o.E.d.A. nehmen wir an, dass die Zielfunktion nicht die Nullfunktion ist).

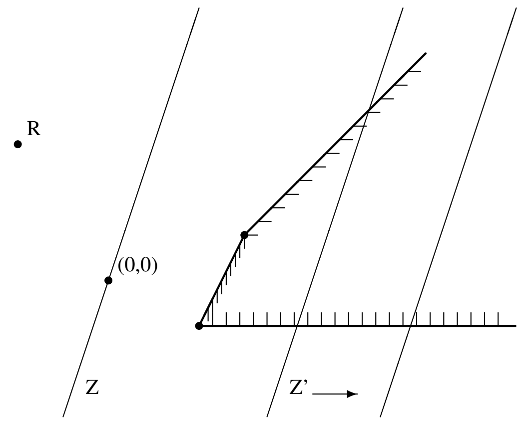


- Wenn wir ein *Maximum* suchen, dann verschieben wir Z' so lange in die Richtung von $(0,0)$ nach R, wie noch ein zulässiger Punkt auf der verschobenen Geraden liegt. Die Funktionswerte bezüglich der Zielfunktion der Punkte auf den Geraden werden dabei immer größer.

– Falls das beliebig weit möglich ist, gibt es keinen optimalen Punkt.
– Sobald das nicht mehr möglich ist, ist jeder Punkt des zulässigen Bereichs, der dann noch auf dieser Geraden liegt, ein optimaler Punkt.



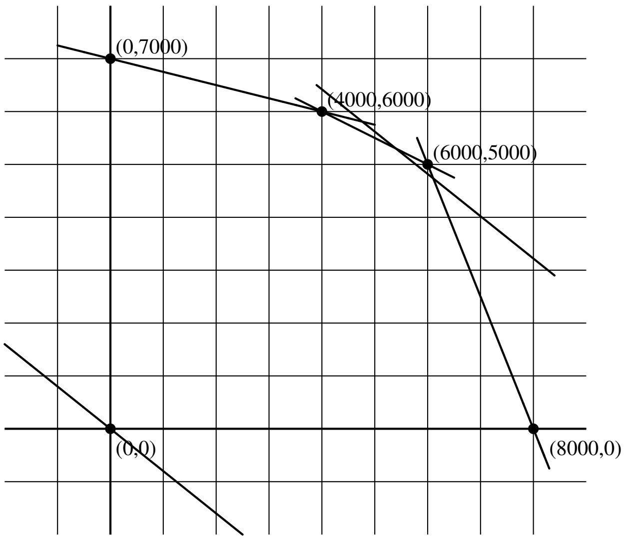
- Wenn wir ein *Minimum* suchen, dann verschieben wir Z' in die andere Richtung und gehen analog vor.



Beispiel 23 : Wir lösen nun das lineare Programm aus Beispiel 21

$$x+4y \le 28000\,,\ 2x+4y \le 32000\,,\ 5x+2y \le 40000\,,\ -x \le 0\,,\ -y \le 0\,,$$
$$4x+5y \text{ maximal}$$

Das Urbild von 0 bezüglich der Zielfunktion ist die Gerade $Z := \mathbb{R}(-5,4)$. Diese Gerade enthält bereits einen Punkt des zulässigen Bereichs, nämlich $(0,0)$. Werten wir die Zielfunktion zum Beispiel in $(1,1)$ aus, erhalten wir die positive Zahl 9. Also verschieben wir die Gerade Z solange in der Richtung von $(0,0)$ nach $(1,1)$, wie die verschobene Gerade noch Punkte des zulässigen Bereichs enthält. Schließlich liegt nur noch der Punkt $(6000,5000)$ auf der verschobenen Geraden. Also ist der Gewinn maximal, wenn 6000 Stück von Produkt P und 5000 Stück von Produkt Q hergestellt werden.



Aus den Überlegungen oben folgt unmittelbar: Wenn es einen optimalen Punkt gibt, dann ist mindestens einer der Randpunkte des zulässigen Bereichs ein optimaler Punkt. Das gilt auch für lineare Programme auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ und ist die Grundlage für den *Simplexalgorithmus* zu ihrer Lösung.

§4. Affine Funktionen

V und W seien Vektorräume über einem Körper K.

Definition 24 : Eine Funktion $a\colon V \longrightarrow W$ heißt *affin*, wenn es eine lineare Funktion $f : V \longrightarrow W$ und einen Vektor $w \in W$ gibt mit

$$a = t_w \circ f\,,$$

wobei t_w die Translation um w in W ist, d.h. es ist

$$a(x) = f(x) + w$$

für alle $x \in V$. Insbesondere ist $w = a(0)$ und $f = t_{(-w)} \circ a$, also sind t_w und f eindeutig durch a bestimmt und heißen der *Translationsanteil* bzw. der *lineare Anteil* von a.

Beispiel 25 : Lineare Funktionen und Translationen sind affine Funktionen.

Beispiel 26: Jede lineare Funktion von $K^{n\times 1}$ nach $K^{m\times 1}$ ist von der Form $x \mapsto Ax$ mit $A \in K^{m\times n}$. Daher ist jede affine Funktion von $K^{n\times 1}$ nach $K^{m\times 1}$ von der Form $x \mapsto Ax+b$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$, d.h. von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n + b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix}.$$

Satz 27: *Die Hintereinanderausführung affiner Funktionen sowie die Umkehrfunktion einer bijektiven affinen Funktion sind wieder affin.*
Seien $a : V \to W$ und $b : Y \to Z$ affine Funktionen mit $\mathrm{Bild}(a) \subset Y$. *Seien $f : V \to W$, $g : Y \to Z$ linear und $w \in W$, $z \in Z$ mit $a = t_w \circ f$ und $b = t_z \circ g$. Dann ist für alle $x \in V$*

$$b \circ a = t_{g(w)+z} \circ (g \circ f)\,.$$

Ist f bijektiv, dann ist $t_{-f^{-1}(w)} \circ f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f.

Beweis: Für alle $x \in V$ ist

$$\begin{aligned} b(a(x)) &= g(a(x)) + z = g(f(x)+w) + z = g(f(x)) + g(w) + z \\ &= (t_{g(w)+z}(g(f(x)))\,. \end{aligned}$$

Definition 28: Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Eine Linearkombination $\sum_{i\in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *affine Kombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn $\sum_{i\in I} c_i = 1$ ist. Die Menge aller affinen Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *affine Hülle* von $(v_i)_{i\in I}$.

Beispiel 29: Die affine Hülle von zwei Vektoren v_1 und v_2 ist ein Punkt, wenn $v_1 = v_2$ ist, bzw. die Gerade

$$\{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in K, c_1 + c_2 = 1\} = \{v_1 + c(v_2 - v_1) \mid c \in K\},$$

wenn $v_1 \neq v_2$ ist.

Satz 30: *Sei $a : V \to W$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die Funktion a ist affin.*
(2) *Für jede affine Linearkombination $\sum_{i\in I} c_i v_i$ einer endlichen Familie in V ist*

$$a\left(\sum_{i\in I} c_i v_i\right) = \sum_{i\in I} c_i a(v_i)\,.$$

(„Das Bild einer affinen Linearkombination ist die affine Linearkombination der Bilder“.)

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $w \in W$ und $f : V \to W$ eine lineare Funktion so, dass $a = t_w \circ f$ ist. Dann ist
$a\left(\sum\limits_{i\in I} c_i v_i\right) = w + \sum\limits_{i\in I} c_i f(v_i) = \left(\sum\limits_{i\in I} c_i\right) w + \sum\limits_{i\in I} c_i f(v_i) =$
$= \sum\limits_{i\in I} c_i (w + f(v_i)) = \sum\limits_{i\in I} c_i a(v_i)$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $w := a(0)$ und $f := t_{(-w)} \circ a$. Es ist zu zeigen, dass f linear ist.
Seien $c_1, c_2 \in K$ und $x_1, x_2 \in V$. Dann ist
$f(c_1x_1 + c_2x_2) = a(c_1x_1 + c_2x_2) - w =$
$= a(c_1x_1 + c_2x_2 + (1 - c_1 - c_2)0) - w =$
$= c_1a(x_1) + c_2a(x_2) + (1 - c_1 - c_2) \cdot a(0) - w =$
$= c_1(a(x_1) - w) + c_2(a(x_2) - w) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$.

Definition 31 : Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V.
Eine Linearkombination $\sum\limits_{i\in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Linearkombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn $\sum\limits_{i\in I} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$ für alle $i \in I$ ist.
Die Menge der konvexen Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Hülle* von $(v_i)_{i\in I}$.
Die konvexe Hülle zweier Vektoren v_1, v_2 heißt *Strecke* zwischen v_1 und v_2.
Die konvexe Hülle dreier nicht kollinearer Punkte v_1, v_2, v_3 heißt *Dreieck* mit Eckpunkten v_1, v_2, v_3 .
Eine Teilmenge von V heißt *Polytop*, wenn sie die konvexe Hülle einer endlichen Familie in V ist.

Es sei $I := \{1, \ldots, n\}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $c_n \neq 1$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = (1 - c_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 - c_n} v_i\right) + c_n v_n = (1 - c_n) w + c_n v_n ,$$

wobei $w := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1-c_n} v_i$ in der konvexen Hülle H von $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ liegt. Daraus folgt: Für $n \geq 3$ ist die konvexe Hülle von $(v_1, \ldots, v_n)$ die Vereinigung aller Strecken zwischen v_n und den Elementen von H.

Beispiel 32 : Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann ein Polytop, wenn sie ein abgeschlossenes Intervall ist.

Beispiel 33 : Die konvexe Hülle einer Menge N ist konvex.
Denn: Seien $\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i$ und $\sum_{j=0}^{m} d_j w_j$ konvexe Linearkombinationen von Elementen in N und $s,t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s+t=1$. Wegen

$$\sum_{i=0}^{\ell} sc_i + \sum_{j=0}^{m} td_j = s\big(\sum_{i=0}^{\ell} c_i\big) + t\big(\sum_{j=0}^{m} d_j\big) = s+t = 1$$

ist $s(\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i) + t(\sum_{j=0}^{m} d_j w_j)$ ein Element der konvexen Hülle von N.

Satz 34 : *Sind $v_0,\dots,v_\ell$ Elemente einer konvexen Menge M in V, dann enthält M auch alle konvexen Linearkombinationen von $v_0,\dots,v_\ell$.*

Insbesondere: Die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(N)$ einer Teilmenge N von V ist die (bezüglich Inklusion) kleinste konvexe Teilmenge von V, die N enthält.

Beweis: Für alle $i \in I$ ist der Vektor v_i eine konvexe Linearkombination $\sum\limits_{j\in J} c_{ji} w_j$ von $\left(w_j\right)_{j\in J}$.
Sei $\sum\limits_{i\in I} d_i v_i$ eine konvexe Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} d_i v_i = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_i c_{ji} w_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) w_j$$

mit $\sum\limits_{i\in I} d_i c_{ji} \geq 0,$ für alle $j \in J$, und

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i \left(\sum_{j\in J} c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i = 1 \ .$$

Daher ist $\sum\limits_{i\in I} d_i v_i \in P$.

Definition 35 : Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V .
Der *Schwerpunkt* von $(v_i)_{i\in I}$ ist

$$\frac{1}{\#(I)} \sum_{i\in I} v_i \ .$$

Der Schwerpunkt von (v_1,v_2) heißt *Mittelpunkt der Strecke* zwischen v_1 und v_2.

Definition 36 : Punkte $v_1,\dots,v_k$ sind genau dann *kollinear*, wenn sie alle in einer Geraden enthalten sind.

Satz 37 : *Die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in V$ sind genau dann kollinear, wenn $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_1$ linear abhängig sind.*

Beweis: Übung.

Satz 38: *Es seien u, v, w drei nicht kollineare Punkte in V . Die Gerade durch u bzw. v bzw. w und den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei Punkten heißt* Schwerlinie *des Dreiecks mit Eckpunkten u, v, w durch u bzw. v bzw. w.*
Die drei Schwerlinien sind paarweise verschieden und schneiden einander im Schwerpunkt $\frac{1}{3}(u+v+w)$ von (u, v, w) .

Beweis: Da u, v, w nicht kollinear sind, sind nach Satz 37 die Vektoren $v-u$ und $w-u$ linear unabhängig. Also sind auch

$$v-u \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(v-u)+\frac{1}{2}(w-u)=\frac{1}{2}(v+w)-u$$

linear unabhängig und daher $u, v, \frac{1}{2}(v+w)$ nicht kollinear. Somit liegt v nicht auf der Schwerlinie durch u . Daher sind die Schwerlinien durch u und durch v verschieden und die drei Schwerlinien haben höchstens einen Schnittpunkt. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(u+v+w) = \frac{1}{3}u+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) = \frac{1}{3}v+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+w)\right) = \\ = \frac{1}{3}w+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) \end{aligned}$$

liegt der Schwerpunkt auf allen Schwerlinien.

Satz 39: *Es seien W ein Vektorraum, $a: V \to W$ eine affine Funktion und $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V. Dann gilt:*

(1) *Das Bild der konvexen Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ bezüglich a ist die konvexe Hülle der Familie $(a(v_i))_{i\in I}$ in W .*
(2) *Das Bild des Schwerpunkts von $(v_i)_{i\in I}$ ist der Schwerpunkt von $(a(v_i))_{i\in I}$.*

Beweis: Folgt aus Satz 30.

Beispiel 40: Es seien P ein Polytop in V und $a: V \to \mathbb{R}$ eine affine Funktion. Dann ist $a(P)$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

KAPITEL 2

Bewegungen in euklidischen Räumen

Es seien V mit $\langle -,- \rangle$ ein euklidischer Raum und $n \in \mathbb{N}$ seine Dimension. In diesem Kapitel werden „Bewegungen starrer Körper" (zum Beispiel eines Roboterarms) mathematisch beschrieben. Dabei verstehen wir unter „Bewegung" eines Körpers in V nicht einen „in der Zeit ablaufenden Vorgang", sondern eine Funktion $f : V \longrightarrow V$, die dem „Ort" $v \in V$ eines „Massenpunktes" zur „Zeit 0" seinen „Ort" $f(v)$ zur „Zeit 1" zuordnet. Ein Körper ist „starr", wenn nach jeder Bewegung die Abstände je zweier seiner „Massenpunkte" gleichgeblieben sind.

Zuerst wiederholen wir einige wichtige Voraussetzungen für diese Überlegungen: Skalarprodukte, ON-Basen, Fußpunkt des Lotes, Winkel.

§1. Skalarprodukte (Wiederholung)

In diesem Abschnitt sei V ein reeller Vektorraum.

Wir werden die folgende Eigenschaft der reellen Zahlen verwenden: Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $b \geq 0$ mit $b^2 = a$. Schreibweise: $b = \sqrt{a}$. Ist $0 \leq a < b$, dann ist auch $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Definition 41 : Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Funktion

$$\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle \ ,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

Für alle $c \in \mathbb{R}$, $u,v,w \in V$ gilt

(1) $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$
(„$\langle -,- \rangle$ ist *symmetrisch*")

(2) $\langle u, c(v+w) \rangle = c\langle u,v \rangle + c\langle u,w \rangle$
(„$\langle -,- \rangle$ ist *linear in der zweiten Komponente*")

(3) Für $v \neq 0$ ist $\langle v,v \rangle$ eine positive reelle Zahl
(„$\langle -,- \rangle$ ist *positiv definit*").

Aus (1) und (2) folgt:

$$\langle c(u+v), w \rangle = c\langle u,w \rangle + c\langle v,w \rangle \ .$$

(„$\langle -,- \rangle$ ist auch *linear in der ersten Komponente*", also zusammengefasst: „$\langle -,- \rangle$ ist *bilinear*")

Ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer Raum*.

Satz 42 : *Es seien $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V und $c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n$ reelle Zahlen. Dann ist*

$$\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i d_j \langle v_i, v_j \rangle ,$$

insbesondere ist das Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ durch seine Gram'sche Matrix bezüglich der Basis $(v_1,\dots,v_n)$

$$(\langle v_i, v_j \rangle)_{1\leq i,j\leq n}$$

eindeutig bestimmt.

Beweis: Induktion über n.

Definition 43 : Ist $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, dann heißen die Funktionen

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad (v,w) \longmapsto ||v-w|| := \sqrt{\langle v-w, v-w \rangle} \ ,$$

bzw.

$$|| \cdot || : V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad v \longmapsto ||v|| := \sqrt{\langle v,v \rangle} \ ,$$

die von $\langle -,- \rangle$ induzierte *Metrik* bzw. *Norm* auf V. Die Zahl $d(v,w)$ heißt *Abstand* zwischen v und w. Die Zahl $||v|| = d(v,0)$ heißt *Abstand zwischen v und* 0, *Norm*, *Betrag* oder *Länge* von v.

Zwei Vektoren v,w stehen *zueinander senkrecht* oder *orthogonal*, wenn $\langle v,w \rangle = 0$ ist. Schreibweise: $v \perp w$.

Beispiel 44 : Die Funktion

$$\langle -,- \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ ,$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und heißt *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$. Für die Standardbasis $(e_1,\dots,e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \ \|e_i\| = 1 \text{ und } \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}(1-\delta_{ij}), \text{ für } 1 \leq i,j \leq n .$$

Satz 45 : *Es seien V mit $\langle -,- \rangle$ ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt und v,w Vektoren in V. Dann ist*

$$|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

(„Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung“ *).*
Weiters sind die Zahlen $|\langle v,w \rangle|$ und $\|v\| \cdot \|w\|$ genau dann gleich, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis: Wenn $v = 0$ oder $w = 0$ ist, dann ist $|\langle v,w\rangle| = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$.
Sei nun $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Wenn v und w linear abhängig sind, gibt es ein $0 \neq c \in \mathbb{R}$ mit $w = c \cdot v$. Daher ist

$$|\langle v,w\rangle| = |c|\langle v,v\rangle = |c| \cdot \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|w\| \ .$$

Wenn v und w linear unabhängig sind, dann ist

$$0 \neq w - (\langle v,w\rangle/\langle v,v\rangle)v$$

und

$$0 < \langle w - (\langle v,w\rangle/\langle v,v\rangle)v, w - (\langle v,w\rangle/\langle v,v\rangle)v\rangle = \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2/\langle v,v\rangle \ .$$

Daher ist

$$\langle v,w\rangle^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \ .$$

Beispiel 46: Für $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und $a,b \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich

$$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

als Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

Satz 47: *Es seien V mit $\langle -,-\rangle$ ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt, $c \in \mathbb{R}$ und v,w Vektoren in V. Dann gilt:*

(1) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(* „Dreiecksungleichung“ *).*
(2) *Wenn v und w zueinander orthogonal sind, dann ist*

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

(„Satz von Pythagoras“ *).*
(3) *Wenn $\|v\| = \|w\|$ ist, dann stehen $v+w$ und $v-w$ zueinander senkrecht (* „Satz von Thales“ *).*
(4) $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\langle v,w\rangle$.
Insbesondere: „Eine Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich sind.“

Beweis:

(1) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \leq$
$\leq$ (Satz 45) $\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$.
(2) $\|v-w\|^2 = \langle v,v\rangle - 0 + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$.
(3) $\langle v+w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$.
(4) $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle -$
$-(\langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle) = 4\langle v,w\rangle$.

Definition 48 : Es sei $u \in V$ und $v \in V,\ v \neq 0$. Mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen. Die Menge

$$\mathbb{R}_{\geq 0}v := \{c \cdot v \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$$

heißt *Richtung in* V. Die Menge

$$u + \mathbb{R}_{\geq 0}v := \{u + c \cdot v \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$$

heißt *Halbgerade* oder *Strahl in* V *mit Anfangspunkt* u *und Richtung* v.

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Zu jeder nicht-negativen Zahl $a \in \mathbb{R}$ und jeder Richtung $H := \{cv \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$ gibt es genau ein Element $w \in H$ mit $\|w\| = a$, und zwar $a\|v\|^{-1} \cdot v$. Also ist jeder Vektor in einem Vektorraum mit Skalarprodukt durch Richtung und Betrag eindeutig bestimmt. Die Sprechweise „ein Vektor hat Betrag und Richtung“ ist daher dann sinnvoll, wenn von Elementen eines Vektorraums mit Skalarprodukt gesprochen wird.

§2. Orthonormalbasen (Wiederholung)

Sei $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V.

Definition 49 : Ein n-Tupel $(v_1,\ldots,v_n)$ in V heißt *orthonormal* bezüglich $\langle -,- \rangle$, wenn für alle $1 \leq i,j \leq n$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

ist. Ein n-Tupel $(v_1,\ldots,v_n)$ in V heißt *Orthonormalbasis* (kurz: *ON-Basis*) von V bezüglich $\langle -,- \rangle$, wenn sie eine Basis von V und orthonormal bezüglich $\langle -,- \rangle$ ist.

Beispiel 50 : Die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes.

Beispiel 51 : Eine Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von V ist genau dann eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle -,- \rangle$, wenn die Gram'sche Matrix

$$(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$$

gleich der Einheitsmatrix I_n ist.

Nach Satz 42 bedeutet also „auf einem reellen Vektorraum ein Skalarprodukt wählen“ dasselbe, wie „von einer Basis dieses Vektorraums festlegen, dass sie eine ON-Basis sein soll“. Das nennt man auch “ein rechtwinkeliges Koordinatensystem wählen“.

Satz 52 : *Ein orthonormales n-Tupel ist linear unabhängig. Insbesondere: Wenn V endlich-dimensional ist, dann ist jedes orthonormale n-Tupel mit* $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ *Elementen eine ON-Basis von V.*

Beweis: Sei $(v_1,\ldots,v_n)$ ein orthonormales n-Tupel und $c_1,\ldots c_n \in \mathbb{R}$. Wenn $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0$ ist, dann ist für $1 \le j \le n$ auch

$$0 = \langle v_j, \sum_{i=1}^n c_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_j, v_i \rangle = c_j \ .$$

Satz 53 : *Es sei $w \in V$ und $\underline{v} := (v_1,\ldots,v_n)$ eine ON-Basis von V. Dann ist*

$$w = \sum_{i=1}^n \langle v_i, w \rangle v_i \ .$$

„Die Koordinate von w bei v_i ist das Skalarprodukt von v_i mit w“.
(Koordinaten von Vektoren bezüglich ON-Basen sind also leicht zu berechnen!)

Beweis: Sei $w = \sum_{j=1}^n c_j v_j$. Für $1 \le i \le n$ ist dann

$$\langle v_i, w \rangle = \langle v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ij} = c_i \ .$$

Beispiel 54 : Es sei $V := \mathbb{R}^2$ und $\langle -,- \rangle$ das Standardskalarprodukt. Dann ist

$$(v_1 := (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), v_2 := (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}))$$

eine ON-Basis von V. Dann ist

$$(1,1) = \langle v_1, (1,1) \rangle v_1 + \langle v_2, (1,1) \rangle v_2 = \frac{7}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 \ .$$

Satz 55 : *Es seien $(v_1,\ldots,v_n)$ eine ON-Basis von V, $u_1,\ldots,u_n \in V$ und $S_{-1},\ldots,S_{-n}$ die Koordinatenspalten von $u_1,\ldots,u_n$ bezüglich der ON-Basis $(v_1,\ldots,v_n)$. Dann ist*

$$S_{ij} = \langle v_i, u_j \rangle \,,$$

$1 \le i,j \le n$ und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) *Das n-Tupel $(u_1,\ldots,u_n)$ ist eine ON-Basis von V.*
(2) *Die Spalten $(S_{-1},\ldots,S_{-n})$ bilden eine ON-Basis von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt.*

Beweis: Mit Satz 53 folgt

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} S_{ki}v_k, \sum_{\ell=1}^{n} S_{\ell j}v_\ell\rangle = \sum_{k,\ell} S_{ki}S_{\ell j}\langle v_k, v_\ell\rangle =$$

$$= \sum_{k,\ell} S_{ki}S_{\ell j}\delta_{k\ell} = \sum_{k} S_{ki}S_{kj} = \langle S_{-i}, S_{-j}\rangle \ ,$$

damit ist die Behauptung leicht nachzuprüfen.

Sobald man also eine ON-Basis in einem euklidischen Raum V gewählt hat, wird das Berechnen des Skalarprodukts von zwei Vektoren in V zum Berechnen des Standardskalarprodukts ihrer Koordinatenspalten vereinfacht! Aber: Gibt es immer eine ON-Basis?

Satz 56 : *Es sei $(w_1,\dots,w_n)$ eine Basis von V. Mit dem folgenden Verfahren („Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren“) kann eine ON-Basis $(v_1,\dots,v_n)$ von V berechnet werden:*

- $u_1 := w_1$
- *Für $2 \le j \le n$ sei*

$$u_j := w_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\langle u_i, w_j\rangle / \langle u_i, u_i\rangle) u_i$$

- *Für $1 \le j \le n$ sei*

$$v_j := \|u_j\|^{-1} u_j \,.$$

Insbesondere: Jeder euklidische Raum hat eine ON-Basis. Für alle j ist ${}_{\mathbb{R}}\langle v_1,\dots,v_j\rangle = {}_{\mathbb{R}}\langle w_1,\dots,w_j\rangle$.

Beweis: Nach Definition ist $\langle v_i, v_i\rangle = 1$, $1 \le i \le n$. Es genügt also zu zeigen, dass für alle $1 \le k < \ell \le n$ die Vektoren u_k und u_ℓ zueinander senkrecht stehen. Das kann einfach nachgerechnet werden:

$$\langle u_k, u_\ell\rangle = \langle u_k, w_\ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\langle u_i, w_\ell\rangle / \langle u_i, u_i\rangle) u_i\rangle =$$

$$= \langle u_k, w_\ell\rangle - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\langle u_i, w_\ell\rangle / \langle u_i, u_i\rangle)\delta_{ki}\langle u_k, u_k\rangle = \langle u_k, w_\ell\rangle - \langle u_k, w_\ell\rangle = 0 \ .$$

Nach Satz 52 ist dann $(v_1,\dots,v_n)$ linear unabhängig, wegen $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ ist $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis.

Beispiel 57 : Es sei V der von $w_1 := (1,0,1)$ und $w_2 := (1,2,3)$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten V mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes (von $\mathbb{R}^3$) als euklidischen Raum.

Es ist $\|w_1\| = \sqrt{2}$, $\|w_2\| = \sqrt{14}$ und $\langle w_1, w_2\rangle = 4$, also ist (w_1, w_2) keine ON-Basis von V.

Mit den Bezeichnungen von Satz 56 erhalten wir

- $u_1 := w_1$,
- $u_2 := w_2 - (\langle u_1, w_2\rangle / \langle u_1, u_1\rangle) u_1 = (1,2,3) - \frac{4}{2}(1,0,1) = (-1,2,1)$
- $v_1 := \frac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,1)$, $v_2 := \frac{1}{6}\sqrt{6}(-1,2,1)$.

(v_1, v_2) ist eine ON-Basis von V.

§3. Der Fußpunkt des Lotes (Wiederholung)

Sei $\langle -, -\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V.

Definition 58 : Es sei U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V. Dann ist

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \text{ für alle } u \in U \text{ ist } \langle v, u\rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum von V und heißt *das orthogonale Komplement von U in V*.

Satz 59 : *Es sei U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V, $v \in V$ und $(u_1, \dots, u_n)$ eine ON-Basis von U.*

(1) *Der Vektor*

$$p_U(v) := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v\rangle u_i \in U$$

hängt nicht von der Wahl der ON-Basis $(u_1, \dots, u_n)$ ab und heißt Fußpunkt des Lotes von v auf U.

(2) *Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig als Summe eines Vektors in U und eines Vektors in $U^{\perp}$ schreiben, und zwar*

$$v = p_U(v) + (v - p_U(v)) ,$$

wobei $p_U(v) \in U$ und $(v - p_U(v)) \in U^{\perp}$ ist. Insbesondere ist $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ und $V = U + U^{\perp} := \{y + y' \mid y \in U, y' \in U^{\perp}\}$.

(3) *Für $v \in V$ und $y \in U$ mit $p_U(v) \neq y$ ist*

$$\|v - y\| > \|v - p_U(v)\| ,$$

das heißt: $p_U(v)$ ist der eindeutig bestimmte Vektor in U, der von v den kleinsten Abstand hat.

Beweis:

(1) Es sei $(w_1,\dots,w_n)$ eine ON-Basis von U. Es ist zu zeigen, dass $p_U(v)=\sum_{k=1}^n\langle w_k,v\rangle w_k$ ist. (Dann hängt $p_U(v)$ nicht von der Wahl der ON-Basis in U ab). Nach Satz 53 ist
$$u_i=\sum_{j=1}^n\langle w_j,u_i\rangle w_j\,,\ 1\le i\le n\,.$$
Daher ist
$$p_U(v)=\sum_{i=1}^n\langle u_i,v\rangle u_i=\sum_{i=1}^n\langle\sum_{j=1}^n\langle w_j,u_i\rangle w_j,v\rangle\sum_{k=1}^n\langle w_k,u_i\rangle w_k=$$
$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\langle w_j,u_i\rangle\langle w_j,v\rangle\langle w_k,u_i\rangle w_k=$$
$$=\sum_{k=1}^n(\sum_{j=1}^n\langle w_j,v\rangle\sum_{i=1}^n(\langle w_j,u_i\rangle\langle w_k,u_i\rangle))w_k=(\text{ cf. Satz 55 })$$
$$=\sum_{k=1}^n(\sum_{j=1}^n\langle w_j,v\rangle\langle w_j,w_k\rangle)w_k=\sum_{k=1}^n\langle w_k,v\rangle w_k\,.$$

(2) Für $y\in U$ ist $\langle v,y\rangle=\langle p_U(v),y\rangle$, also
$$\langle v-p_U(v),y\rangle=\langle v,y\rangle-\langle p_U(v),y\rangle=0\,.$$
Daher ist $v-p_U(v)\in U^\perp$ und $v=p_U(v)+(v-p_U(v))\in U+U^\perp$. Wenn $y\neq 0$ ist, dann ist $0<\langle y,y\rangle$, also $y\notin U^\perp$. Daher ist $U\cap U^\perp=\{0\}$.

(3) Für $y\in U$ mit $p_U(v)\neq y$ ist $0\neq p_U(v)-y\in U$ und $v-p_U(v)\in U^\perp$. Deshalb ist
$$\|v-y\|^2=\|(v-p_U(v))+(p_U(v)-y)\|^2=$$
$$=\|v-p_U(v)\|^2+\|p_U(v)-y\|^2>\|v-p_U(v)\|^2\,.$$

Beispiel 60 : Es sei $0\neq u\in V$ und U die Gerade $\mathbb{R}u$. Dann ist $\|u\|^{-1}u$ eine ON-Basis von U. Der Fußpunkt des Lotes von $v\in V$ auf die Gerade U ist
$$p_{\mathbb{R}u}(v)=\langle\|u\|^{-1}u,v\rangle\|u\|^{-1}u=(\langle u,v\rangle/\langle u,u\rangle)u\,.$$

Beispiel 61 : Satz 59 ermöglicht eine geometrische Interpretation des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens (Satz 56):
Seien $u_1,\dots,u_{j-1}$ schon berechnet. Dann ist $(v_1,\dots,v_{j-1})$ eine Orthonormalbasis des von $v_1,\dots,v_{j-1}$ erzeugten Untervektorraums V_{j-1}. Der Vektor
$$\sum_{i=1}^{j-1}(\langle u_i,w_j\rangle/\langle u_i,u_i\rangle)u_i$$

ist dann der Fußpunkt des Lotes von w_j auf V_{j-1} und u_j der Fußpunkt des Lotes von w_j auf $V_{j-1}^{\perp}$. Wegen $w_j \notin V_{j-1}$ ist $u_j \neq 0$.

Definition 62 : Es sei Z ein endlichdimensionaler affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum U. Der Vektor

$$p_Z(v) := z + p_U(v - z)$$

heißt *Fußpunkt des Lotes* von v auf den affinen Unterraum Z.
Die Zahl $\|v - p_Z(v)\|$ heißt *Abstand des Punktes v vom affinen Unterraum Z*.

§4. Winkel (Wiederholung)

Sei V mit $\langle -, - \rangle$ ein euklidischer Raum.

Definition 63 : Es sei $w \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. Die Menge

$$\{v \in V \mid \|v - w\| = r\}$$

heißt *Kreis mit Mittelpunkt w und Radius r*. Der Kreis mit Mittelpunkt w und Radius 1 heißt *Einheitskreis um u*.

Es seien $u, v, w \in V$ mit $u \neq 0,\ v \neq 0$. Wir möchten die Lage der zwei Halbgeraden $w + \mathbb{R}_{\geq 0}u$ und $w + \mathbb{R}_{\geq 0}v$ zueinander durch eine Zahl beschreiben, welche der „Länge des (kürzeren) Bogens“ zwischen $w + \|u\|^{-1}u$ und $w + \|v\|^{-1}v$ auf dem Einheitskreis um w entsprechen soll.

Diese Zahl soll nur von u und v, aber nicht von w abhängen. Wir nehmen also im weiteren an, dass $w = 0$ ist. Sei

$$u' := \|u\|^{-1}u \quad \text{und} \quad v' := \|v\|^{-1}v\,.$$

Der Fußpunkt des Lotes $p_{\mathbb{R}u}(v)$ von v' auf die Gerade $\mathbb{R}u$ ist dann

$$\langle u', v' \rangle u'$$

(siehe Beispiel 60). Die Zahl $|\langle u', v' \rangle|$ ist der Abstand zwischen 0 und $p_{\mathbb{R}u}(v')$, kann also leichter gemessen werden als die „Länge des (kürzeren) Bogens“ zwischen u' und v'. Nach Satz 45 ist $-1 \leq \langle u', v' \rangle \leq 1$.

Wenn $\alpha \in [0, \pi]$ die „Länge des (kürzeren) Bogens“ zwischen u' und v' ist, setzen wir

$$\cos(\alpha) := \langle u', v' \rangle = \langle u, v \rangle / (\|u\| \cdot \|v\|)$$

(Sprechweise: Cosinus von α). In der Analysis zeigt man, dass es zu jeder Zahl $z \in [-1, 1]$ genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = z$ gibt. Anders formuliert: die Funktion

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]\,,\ \alpha \longmapsto \cos(\alpha)\,,$$

ist bijektiv. Für $\alpha \in [0,\pi]$ bezeichnen wir mit $\sin(\alpha)$ (Sprechweise: Sinus von α) den Abstand von v' zur Geraden $\mathbb{R}u$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$.

Definition 64: Es seien $u,v,w \in V$, $u \neq 0$ und $v \neq 0$. Die eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in [0,\pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \langle u,v\rangle/(\|u\| \cdot \|v\|)$$

heißt *Winkel zwischen den Halbgeraden* $w+\mathbb{R}_{\geq 0}u$ *und* $w+\mathbb{R}_{\geq 0}v$ oder kurz *Winkel zwischen u und v*.

Satz 65: *(„Cosinussatz") Es seien* $v,w \in V$ *mit* $v \neq 0$, $w \neq 0$ *und* α *der Winkel zwischen v und w. Dann ist*

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha) .$$

Beweis: $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle =$
$= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha)$.

§5. Orientierung, Volumen und Vektorprodukt (Wiederholung)

In diesem Abschnitt sei V ein reeller Vektorraum.

Definition 66: Es seien $(v_1,\ldots,v_n)$ und $(w_1,\ldots,w_n)$ Basen von V. Die Matrix $T \in K^{n\times n}$, deren Spalten $T_{-1},\ldots,T_{-n}$ die Koordinatenspalten von $w_1,\ldots,w_n$ bezüglich der Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ sind, heißt *Transformationsmatrix* von $(v_1,\ldots,v_n)$ nach $(w_1,\ldots,w_n)$.
Die Basen $(v_1,\ldots,v_n)$ und $(w_1,\ldots,w_n)$ heißen *gleich orientiert*, wenn $\det(T) > 0$ ist, und *verschieden orientiert*, wenn $\det(T) < 0$ ist.
Wählt man eine Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von V aus, dann wird die Menge aller Basen in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt: die Teilmenge aller gleich wie $(v_1,\ldots,v_n)$ orientierten Basen und die Teilmenge aller anderen Basen. Diese zwei Mengen heißen *Orientierungen* von V.
Durch die Wahl einer Basis von V wird eine Orientierung festgelegt. V zusammen mit einer Orientierung heißt *orientierter Vektorraum*. Die Basen in der gegebenen Orientierung heißen dann *positiv orientiert*, die anderen *negativ orientiert*.

Wird die Zeichenebene bzw. der physikalische Raum als reeller Vektorraum betrachtet, dann nennt man seine zwei Orientierungen „Orientierung im Uhrzeigersinn" und „Orientierung gegen den Uhrzeigersinn" bzw. „Orientierung nach der Linken-Hand-Regel" und „Orientierung nach der Rechten-Hand-Regel".

Beispiel 67: Die Standardbasis $(e_1,\ldots,e_{n-1},e_n)$ von $\mathbb{R}^n$ und die Basis $(e_1,\ldots,e_{n-1},-e_n)$ sind verschieden orientiert. Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ ist also gleich orientiert wie genau eine dieser zwei Basen.

Sei V mit $\langle -,- \rangle$ ein n-dimensionaler euklidischer Raum.

Definition 68: Seien $w_1,\ldots,w_n \in V$. Die Menge

$$P(w_1,\ldots,w_n) := \{c_1w_1+\ldots+c_nw_n \mid 0 \le c_i \le 1,\ c_i \in \mathbb{R}\}$$

heißt das *von $w_1,\ldots,w_n$ erzeugte Parallelotop*. Wenn $n=2$ ist, dann heißt ein Parallelotop *Parallelogramm*.
Es sei $(v_1,\ldots,v_n)$ eine ON-Basis von V und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, deren i-te Spalte die Koordinatenspalte von $w_i \in V$ bezüglich $(v_1,\ldots,v_n)$ ist, $1 \le i \le n$. Die Zahl

$$vol(P(w_1,\ldots,w_n)) := |\det(S)|$$

heißt das *Volumen* von $P(w_1,\ldots,w_n)$.

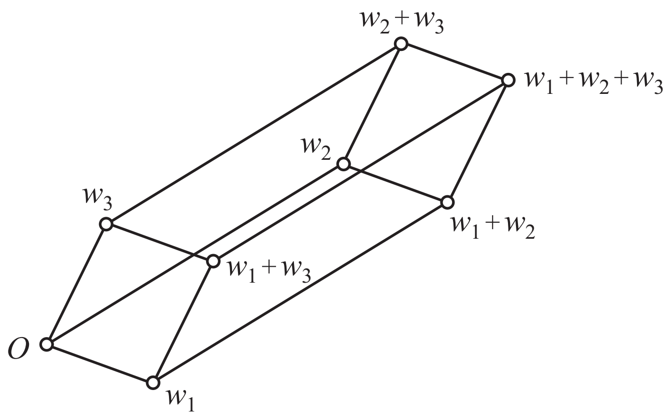


ABBILDUNG 1. Parallelotop $P(w_1,w_2,w_3)$

Satz 69: *Es seien $(v_1,\ldots,v_n)$ eine ON-Basis von V und $w_1,\ldots,w_n$ Vektoren in V. Dann ist*

$$vol(P(w_1,\ldots,w_n)) = \sqrt{\det((\langle w_i,w_j\rangle)_{1\le i,j\le n})}.$$

Insbesondere: Das Volumen eines Parallelotops hängt nicht von der Wahl der ON-Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ ab. Wenn $(w_1,\ldots,w_n)$ eine ON-Basis von V ist, dann ist $vol(P(w_1,\ldots,w_n)) = 1$.

Beweis: Sei S die Matrix, deren Spalten die Koordinatenspalten von $w_1,\dots,w_n$ bezüglich $(v_1,\dots,v_n)$ sind. Für $1 \le i,j \le n$ gilt nach Satz 55

$$\langle w_i, w_j\rangle = \langle S_{-i}, S_{-j}\rangle = (S^T \cdot S)_{ij} \ .$$

Daher ist

$$\det((\langle w_i, w_j\rangle)_{1\le i,j\le n}) = \det(S^T \cdot S) = \det(S)^2 = vol(P(w_1,\dots,w_n))^2 \ .$$

Satz 70 : *Es seien $u,w \in V$, $u \neq 0$, $w \neq 0$ und α der Winkel zwischen u und w. Dann ist*

$$vol(P(u,w)) = \|u\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\alpha) \ .$$

Beweis: Nach Satz 69 ist

$$vol(P(u,w))^2 = \det\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle u,w\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix} = \|u\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle u,w\rangle^2 =$$

$$= \|u\|^2 \cdot \|w\|^2 \cdot (1-\cos^2(\alpha)) = (\|u\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\alpha))^2 \ .$$

Definition 71 : V sei ein dreidimensionaler orientierter euklidischer Raum. Für $u,w \in V$ sei $u \times w$ der eindeutig bestimmte Vektor in V mit den drei Eigenschaften

- $\|u \times w\| = vol(P(u,w))$,
- $u \times w$ und u stehen zueinander senkrecht, $u \times w$ und w stehen zueinander senkrecht,
- wenn $u \times w \neq 0$ ist, dann ist $(u,w,u\times w)$ eine positiv orientierte Basis von V.

Dieser Vektor heißt das *Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) von u und w*. Sprechweise: „u Kreuz w“.

Satz 72 : *V sei ein dreidimensionaler euklidischer Raum, der durch eine ON-Basis (v_1,v_2,v_3) orientiert ist.*

(1) $v_1 \times v_2 = v_3\,,\ v_1 \times v_3 = -v_2\,,\ v_2 \times v_3 = v_1\,.$

(2) *Ist (u,w) eine ON-Basis des von u und w erzeugten Untervektorraums, dann ist $(u,w,u\times w)$ eine wie (v_1,v_2,v_3) orientierte ON-Basis von V.*

(3) *Für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3$, ist*

$$(\sum_{i=1}^{3} a_i v_i) \times (\sum_{i=1}^{3} b_i v_i) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} v_1 - \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} v_2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} v_3 \ .$$

(4) *Für* $u, u', w, w' \in V$, $c, d \in \mathbb{R}$ *ist*

$$c(u+u') \times w = c(u \times w) + c(u' \times w)\,,$$

$$u \times (d(w+w')) = d(u \times w) + d(u \times w')$$

$$\textit{und}\;\; u \times w = -w \times u\;.$$

(5) *Für* $x, y, z \in V$ *ist* $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$.

(6) *Für* $x, y, z \in V$ *ist*

$$(x \times y) \times z + (z \times x) \times y + (y \times z) \times x = 0\;.$$

(Beachte: im Allgemeinen ist $(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z)$*).*

Beweis:

(1) und (2) folgen aus der Definition.

(3) Man rechnet nach, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} v_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} v_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} v_3$$

die in der Definition von $(\sum_{i=1}^{3} a_i v_i) \times (\sum_{i=1}^{3} b_i v_i)$ geforderten Eigenschaften hat.

(4) Kann mit (3) nachgerechnet werden.

(5) Wenn $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ist , dann ist $v_i \times (v_j \times v_k) = 0$. Wenn $i \neq k$ bzw. $i \neq j$, dann ist $v_i \times (v_i \times v_k) = -v_k$ und $v_i \times (v_j \times v_i) = v_j$.
Sei $x = \sum_{i=1}^{3} a_i v_i$, $y = \sum_{j=1}^{3} b_j v_j$ und $z = \sum_{k=1}^{3} c_k v_k$. Dann ist
$x \times (y \times z) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k (v_i \times (v_j \times v_k)) =$
$= -\sum_{i,k} a_i b_i c_k v_k + \sum_{i,j} a_i b_j c_i v_j = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$.

(6) Nach (5) ist $x \times (y \times z) + z \times (x \times y) + y \times (z \times x) =$
$= \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle z, y \rangle x - \langle z, x \rangle y + \langle y, x \rangle z - \langle y, z \rangle x = 0$.

§6. Isometrien

Definition 73 : Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *Isometrie*, wenn für alle v, $w \in V$

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$$

ist. („Isometrien erhalten Abstände.“)
Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *orthogonal*, wenn für alle v, $w \in V$

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

ist. („Orthogonale Funktionen erhalten das Skalarprodukt.“)

Satz 74 : *Jede Translation in* V *ist eine Isometrie. Die Identität* Id_V *ist die einzige orthogonale Translation.*

Beweis: Sei t eine Translation und $u := t(0)$. Dann ist

$$\|t(v)-t(w)\| = \|(v+u)-(w+u)\| = \|v-w\|.$$

Wenn t orthogonal ist, dann ist

$$\langle u,u\rangle = \langle t(0),t(0)\rangle = \langle 0,0\rangle = 0,$$

also $u=0$ und $t=\mathrm{Id}_V$.

Satz 75: *Für eine Funktion $f : V \to V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist orthogonal.*
(2) *f ist eine Isometrie und linear.*
(3) *f ist eine Isometrie und $f(0)=0$.*

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Für alle v, $w \in V$ ist

$$\|f(v)-f(w)\|^2 = \langle f(v)-f(w), f(v)-f(w)\rangle =$$

$$= \langle f(v),f(v)\rangle - 2\langle f(v),f(w)\rangle + \langle f(w),f(w)\rangle \underset{(1)}{=}$$

$$= \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v-w,v-w\rangle = \|v-w\|^2,$$

also ist f eine Isometrie.
Wir zeigen noch, dass f linear ist, das heißt: für alle v, $w \in V$ und für alle c, $d \in \mathbb{R}$ ist $f(cv+dw)-cf(v)-df(w)=0$.
Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\|f(cv+dw)-cf(v)-df(w)\|^2 = 0 \text{ ist:}$$

$$\|f(cv+dw)-cf(v)-df(w)\|^2 =$$

$$\langle f(cv+dw)-cf(v)-df(w), f(cv+dw)-cf(v)-df(w)\rangle =$$

$$= \langle f(cv+dw), f(cv+dw)\rangle + c^2\langle f(v),f(v)\rangle +$$

$$+d^2\langle f(w),f(w)\rangle - 2c\langle f(cv+dw),f(v)\rangle -$$

$$-2d\langle f(cv+dw),f(w)\rangle + 2cd\langle f(v),f(w)\rangle \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \langle cv+dw,cv+dw\rangle + c^2\langle v,v\rangle + d^2\langle w,w\rangle -$$

$$-2c\langle cv+dw,v\rangle - 2d\langle cv+dw,w\rangle + 2cd\langle v,w\rangle =$$

$$= \langle (cv+dw)-cv-dw,(cv+dw)-cv-dw\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : trivial

(3) $\Rightarrow$ (1) : Für alle $u \in V$ ist

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \|f(u)\|^2 = \|f(u) - 0\|^2 =$$

$$\|f(u) - f(0)\|^2 = \|u - 0\|^2 = \|u\|^2 = \langle u, u\rangle\,.$$

Daher gilt für alle v, $w \in V$:

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle f(v), f(v)\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle f(w), f(w)\rangle - \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w)\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - \|f(v) - f(w)\|^2\right) \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2\right) = \langle v, w\rangle\,.$$

Satz 76 :

(1) *Die Zusammensetzung von Isometrien ist eine Isometrie.*
(2) *Jede affine Funktion mit orthogonalem linearen Anteil ist eine Isometrie.*
(3) *Jede Isometrie $f : V \to V$ ist eine affine Funktion, ihr Translationsanteil ist die Translation um $f(0)$ und ihr linearer Anteil ist orthogonal. Kurz: $f = t_{f(0)} \circ g$ mit $g : V \to V$ orthogonal (und damit linear).*
(4) *Die Menge aller Isometrien von V ist mit der Zusammensetzung von Funktionen eine Gruppe und heißt* Isometriegruppe von V. *Inbesondere ist jede Isometrie $f = t_u \circ g$ bijektiv und es ist*

$$f^{-1} = t_{-g^{-1}(u)} \circ g^{-1}\,.$$

Beweis:

(1) Es seien f, h Isometrien von V und v, $w \in V$. Dann ist

$$\|(f \circ h)(v) - (f \circ h)(w)\| = \|f(h(v)) - f(h(w))\| =$$
$$= \|h(v) - h(w)\| = \|v - w\|\,,$$

also $f \circ h$ eine Isometrie.
(2) Nach Satz 74 und Satz 75 sind Translationen und orthogonale Funktionen Isometrien, also auch ihre Zusammensetzung.
(3) Sei $g := t_{-f(0)} \circ f$. Dann ist $f = t_{f(0)} \circ g$. Nach (1) ist g eine Isometrie, weiters ist $g(0) = -f(0) + f(0) = 0$. Nun folgt aus Satz 75, dass g orthogonal und linear ist.
(4) Es sei $g : V \to V$ der lineare Anteil einer Isometrie. Nach (3) ist g orthogonal.
Ist $v \in V$ so, dass $g(v) = 0$ ist, dann ist $\langle v, v\rangle = \langle g(v), g(v)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$, daher $v = 0$. Also ist g injektiv. Weil Definitions- und Bildbereich

von g dieselbe Dimension haben, ist g auch bijektiv.
Für alle $v, w \in V$ ist

$$\left\langle g^{-1}(v), g^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle g(g^{-1}(v)), g(g^{-1}(w))\right\rangle = \langle v, w\rangle ,$$

daher ist g^{-1} orthogonal. Nun prüft man leicht nach, dass die Isometrie $t_{-g^{-1}(u)} \circ g^{-1}$ die Umkehrfunktion von $t_u \circ g$ ist.

Satz 77 :

(1) *Die Menge $T(V)$ aller Translationen von V ist eine Untergruppe der Isometriegruppe und heißt* Translationsgruppe von V.
(2) *Die Menge $\mathcal{O}(V)$ aller orthogonalen Funktionen von V ist eine Untergruppe sowohl der Isometriegruppe als auch der Gruppe* $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ *und heißt* orthogonale Gruppe von V.
(3) *Die Translationsgruppe $T(V)$ ist kommutativ, die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(V)$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.*

Beweis: Übung.

§7. Basiswechsel

In diesem Abschnitt sei V ein Vektorraum über K mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, $\underline{v} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, W ein Vektorraum über K mit Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $\underline{w} := (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Wenn $f : V \longrightarrow W$ eine Funktion ist, schreiben wir kurz $f(\underline{v})$ anstatt $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.

Satz 78 : *Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Funktion mit Matrix $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m\times n}$, $u \in V$ und $c \in K^{n\times 1}$ die Koordinatenspalte von u bezüglich $\underline{v}$, also $u = \underline{v}c$. Dann ist*

$$f(\underline{v}) = \underline{w}A \qquad \textit{und} \qquad f(u) = \underline{w}Ac\,.$$

Beweis: Es ist

$$f(\underline{v}) = (f(v_1), \ldots, f(v_n)) = (\underline{w}A_{-1}, \ldots, \underline{w}A_{-n}) = \underline{w}A$$

und

$$f(u) = f(\underline{v}c) = f(\underline{v})c = \underline{w}Ac\,.$$

Satz 79 : *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion mit Matrix*

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m\times n}\,.$$

Sei $\underline{v}'$ eine weitere Basis von V, $\underline{w}'$ eine weitere Basis von W, $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Transformationsmatrix von $\underline{v}$ zu $\underline{v}'$ und $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ die Transformationsmatrix von $\underline{w}$ zu $\underline{w}'$. Dann ist

$$M(f,\underline{v}',\underline{w}') = S^{-1}AT\,.$$

Im Spezialfall $V = W$, $\underline{v} = \underline{w}$ und $\underline{v}' = \underline{w}'$ ist $S = T$ und

$$M(f,\underline{v}') = T^{-1}AT\,.$$

Beweis: Nach Satz 78 ist

$\underline{w}'M(f,\underline{v}',\underline{w}') = f(\underline{v}') = f(\underline{v}T) = f(\underline{v})T = \underline{w}AT = (\underline{w}'S^{-1})AT = \underline{w}'S^{-1}AT\,.$

Da $\underline{w}'$ eine Basis ist, folgt daraus $M(f,\underline{v}',\underline{w}') = S^{-1}AT\,.$

Definition 80 : Zwei Matrizen $A,B \in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = T^{-1}AT\,.$$

Satz 81 : *Sei $f : V \to V$ eine K-lineare Funktion mit Matrix*

$$A := M(f,\underline{v}) \in K^{n\times n}\,.$$

Eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ ist genau dann zu A ähnlich, wenn es eine Basis $\underline{v}'$ von V gibt mit $M(f,\underline{v}') = B$.

Beweis: Nach Satz 79 sind die Matrizen $M(f,\underline{v},\underline{w})$ und $M(f,\underline{v}',\underline{w}')$ ähnlich. Wenn B zu A ähnlich ist, gibt es $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = T^{-1}AT$. Dann ist $\underline{v}' := \underline{v}T$ eine Basis von V. Nach Satz 79 ist $M(f,\underline{v}') = T^{-1}AT = B$.

Ähnliche Matrizen beschreiben (bezüglich verschiedener Basen) dieselbe lineare Funktion. Wird ein physikalisches Phänomen durch eine lineare Funktion von einem endlichdimensionalen Vektorraum V nach V beschrieben und diese (nach Wahl einer Basis von V) durch eine Matrix, dann haben nur jene Eigenschaften dieser Matrix „physikalische Bedeutung“, die sich beim Übergang zu einer ähnlichen Matrix nicht ändern. Beispiele für solche Eigenschaften von Matrizen sind die Determinante und die „Spur“.

Definition 82 : Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann heißt

$$\mathrm{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

die *Spur* von A.

Satz 83 :

(1) *Die Funktion* spur : $K^{n\times n} \longrightarrow K$ *ist linear.*
(2) *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt:* $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$.
(3) *Für* $A \in K^{n\times n}$ *und* $T \in GL_n(K)$ *gilt:* $\mathrm{spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{spur}(A)$.
(4) *Sei* $f : V \to V$ *eine lineare Funktion und* A *die Matrix von* f *bezüglich* $\underline{v}$*. Dann ist*

$$\mathrm{spur}(f) := \mathrm{spur}(A)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{v}$ *und heißt* Spur *von* f.

Beweis: (1) und (2) nachrechnen, (3) folgt aus (2), (4) aus (3).

Satz 84 :

(1) *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt:* $\det(AB) = \det(BA)$.
(2) *Für* $A \in K^{n\times n}$ *und* $T \in GL_n(K)$ *gilt:* $\det(T^{-1}AT) = \det(A)$.
(3) *Sei* $f : V \to V$ *eine lineare Funktion und* A *die Matrix von* f *bezüglich* $\underline{v}$*. Dann ist*

$$\det(f) := \det(A)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{v}$ *und heißt* Determinante *von* f.

Beweis:

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$,
(2) folgt aus (1),
(3) folgt aus (2).

§8. Orthogonale Funktionen

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Funktion.

Definition 85 : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal* genau dann, wenn $A \cdot A^T = I_n$ ist (wenn also die zu A transponierte Matrix zu A invers ist).

Satz 86 : *Es seien* $\underline{v}$ *eine ON-Basis von* V *und* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Matrix von* f *bezüglich* $\underline{v}$*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Die Funktion* f *ist orthogonal.*
(2) *Die Familie* $f(\underline{v}) := (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ *ist eine ON-Basis von* V.
(3) *Die Matrix* A *ist orthogonal.*

Insbesondere gilt: Wenn f *orthogonal ist, dann ist* A^T *die Matrix von* f^{-1} *bezüglich* $\underline{v}$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Wenn f orthogonal ist, dann ist
$$\left\langle f(v_i), f(v_j)\right\rangle = \left\langle v_i, v_j\right\rangle = \delta_{ij},\ 1 \le i,j \le n.$$
Daher ist die Familie $f(\underline{v})$ orthonormal, also auch linear unabhängig. Weil V n-dimensional ist, folgt daraus die Behauptung.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Wenn $f(\underline{v}) = \underline{v}A$ eine ON-Basis ist, dann ist A orthogonal.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Wenn A orthogonal ist, dann ist $\underline{v}A$ eine ON-Basis. Für $y,z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ist daher
$$\langle f(\underline{v}y), f(\underline{v}z)\rangle = \langle(\underline{v}A)y, (\underline{v}A)z\rangle = \langle y,z\rangle = \langle \underline{v}y, \underline{v}z\rangle.$$
Somit ist f orthogonal.

Satz 87 : *Wenn f orthogonal ist, dann ist*
$$\det(f) \in \{1,-1\} \text{ und } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subseteq \{1,-1\}.$$

Beweis: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix von f bezüglich einer ON-Basis. Nach Satz 86 ist $\det(f) = \det(A) \in \{1,-1\}$.
Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $c \in \mathbb{R}$, dann ist
$0 \neq \langle v,v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle cv, cv\rangle = c^2\langle v,v\rangle$, also $c^2 = 1$.

Definition 88 : Ein Untervektorraum W von V ist genau dann *unter f stabil*, wenn $f(W) \subseteq W$ ist.

Satz 89 : *Es seien f orthogonal und W ein unter f stabiler Untervektorraum von V. Dann ist auch $W^\perp$ stabil unter f.*

Beweis: Sei $v \in W^\perp$. Wir zeigen, dass auch $f(v) \in W^\perp$ ist.
Für alle $w \in W$ ist $f(w) \in W$ und, weil f linear und bijektiv ist, auch $f^{-1}(w) \in W$. Daher ist
$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle f^{-1}(f(v)), f^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle v, f^{-1}(w)\right\rangle = 0.$$

Beispiel 90 : Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix in oberer Blockdreiecksform
$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Blockgröße von B_{11} sei k.
Betrachten wir A als lineare Funktion
$$A : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad , \quad x \longmapsto Ax\ ,$$

dann ist der von $e_1,...,e_k$ erzeugte Untervektorraum stabil unter A.
Wenn A orthogonal ist, ist auch

$$_{\mathbb{R}}\langle e_1,...,e_k\rangle^{\perp} =_{\mathbb{R}} \langle e_{k+1},...,e_n\rangle$$

stabil unter A, also $B_{12} = 0$. Daher hat jede orthogonale Matrix in Blockdreiecksform sogar Blockdiagonalgestalt.

§9. Spiegelungen

Definition 91 : Es sei $h : V \to V$ eine Funktion. Die Menge

$$Fix(h) := \{v \in V \mid h(v) = v\}$$

heißt *Menge der Fixpunkte* (oder kurz: *Fixmenge*) von h.

Beispiel 92 : $Fix(-Id_V) = \{0\}, Fix(Id_V) = V$.
Die Fixmenge einer linearen Funktion ist ihr Eigenraum zum Eigenwert 1.
Die Fixmenge einer Translation t_u mit $u \neq 0$ ist leer.

Hilfssatz 93 : *Es seien $g : V \to V$ eine lineare Funktion und $u \in V$. Die Fixmenge der affinen Funktion $t_u \circ g$ ist entweder leer oder ein affiner Unterraum von V, dessen paralleler Untervektorraum ist $Fix(g)$.*

Beweis: Die Fixmenge von $t_u \circ g$ ist das Urbild von 0 bezüglich der affinen Funktion $t_u \circ g - Id_V = t_u \circ (g - Id_V)$, also leer oder ein affiner Unterraum. Der zu diesem parallele Untervektorraum ist dann Kern$(g - Id_V)$, also $Fix(g)$.

Definition 94 : Eine Isometrie von V heißt *Spiegelung in V*, wenn ihre Fixmenge eine Hyperebene in V ist, das heißt: die Dimension ihrer Fixmenge ist $n - 1$.
Ist M die Fixmenge einer Spiegelung, dann heißt diese *Spiegelung um M*.

Beispiel 95 : Die Funktion

$$\mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad , \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} x \,,$$

ist eine Spiegelung in $\mathbb{R}^n$.

Satz 96 : *Es sei s eine Spiegelung.*

(1) *Der lineare Anteil von s ist auch eine Spiegelung, seine Fixmenge ist der parallele Untervektorraum von $Fix(s)$.*
(2) *Wenn s linear ist, dann ist s orthogonal und es gibt eine ON-Basis von V, bezüglich der s die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat. Insbesondere ist $\det(s) = -1$ *und* $Sp_{\mathbb{R}}(s) = \{1, -1\}$.
(3) *Zwei Spiegelungen sind genau dann gleich, wenn ihre Fixmengen gleich sind.*
(4) *Es ist $s^2 = Id_V$.*

Beweis:

(1) Nach Satz 76 ist der lineare Anteil von s eine Isometrie, nach Hilfssatz 93 ist seine Fixmenge der parallele Untervektorraum von $Fix(s)$, insbesondere eine Hyperebene in V.
(2) Wähle eine ON-Basis $(v_1, ..., v_{n-1})$ von $Fix(s)$ und ergänze sie zu einer ON-Basis $(v_1, ..., v_{n-1}, v_n)$ von V. Nach Satz 75 ist s orthogonal, daraus folgt mit Satz 86 , dass auch

$$(s(v_1), ..., s(v_n)) = (v_1, ..., v_{n-1}, s(v_n))$$

eine ON-Basis von V ist. Daher muss $s(v_n) = v_n$ oder $s(v_n) = -v_n$ sein. Wegen $Fix(s) \neq V$ muss $s(v_n) = -v_n$ sein.
(3) Es seien $t_v \circ f,\ t_w \circ g$ zwei Isometrien (mit linearen Anteilen f, g), deren Fixmengen gleich sind. Aus (1) folgt, dass $Fix(f) = Fix(g)$ ist. Nun folgt aus (2), dass $f = g$.
Sei u ein Element von $Fix(t_v \circ f) = Fix(t_w \circ g)$. Dann ist
$u = (t_v \circ f)(u) = v + f(u)$ und $u = (t_w \circ g)(u) = w + f(u)$,
also $v = u - f(u) = w$.
(4) Es seien f linear und $s = t_u \circ f$. Nach (2) ist $f \circ f = Id_V$.
Daher ist $s \circ s = t_u \circ f \circ t_u \circ f = t_{u+f(u)}$, somit ist $s \circ s$ eine Translation.
Wegen $\emptyset \neq Fix(s) \subseteq Fix(s \circ s)$ muss $s \circ s = Id_V$ sein.

Satz 97 : *Zu jeder Hyperebene T von V gibt es genau eine Spiegelung s mit $Fix(s) = T$, und zwar*

$$s : V \to V \quad , \quad v \longmapsto 2 \cdot p_T(v) - v\ .$$

Dabei ist p_T die orthogonale Projektion von V auf T.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass s eine Isometrie ist. Die Eindeutigkeit folgt aus Aussage (3) in Satz 96.
Es seien $x \in T$, U der parallele Untervektorraum von T und $y := x - p_U(x)$. Dann ist $p_T = t_y \circ p_U$ und $s = 2t_y \circ p_U - Id_V = t_{2y} \circ (2p_U - Id_V)$. Daher genügt es zu zeigen, dass $2p_U - Id_V$ orthogonal ist.

Für alle $v \in V$ ist

$$\begin{aligned}(2p_U - Id_V)(v) &= p_U(v) - (v - p_U(v)), \\ v &= p_U(v) + (v - p_U(v))\end{aligned}$$

und $p_U(v) \in U$, $(v - p_U(v)) \in U^\perp$.
Für alle $v, w \in V$ ist daher

$$\begin{aligned}\langle (2p_U - Id_V)(v), (2p_U - Id_V)(w) \rangle &= \\ \langle p_U(v) - (v - p_U(v)), p_U(w) - (w - p_U(w)) \rangle &= \\ \langle p_U(v), p_U(w) \rangle + \langle v - p_U(v), w - p_U(w) \rangle &= \\ \langle p_U(v) + (v - p_U(v)), p_U(w) + (w - p_U(w)) \rangle &= \langle v, w \rangle .\end{aligned}$$

Satz 98: *Jede orthogonale Funktion von V nach V ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.*

Beweis: Induktion nach n.

Wenn $n = 1$ ist, dann gibt es nur zwei orthogonale Funktionen, nämlich Id_V und die Spiegelung $-\mathrm{Id}_V$. Die erste ist das Produkt von 0 Spiegelungen, die zweite von einer Spiegelung.

Sei nun $n > 1$ und $f \neq \mathrm{Id}_V$ eine orthogonale Funktion. Dann gibt es einen Vektor v in V mit $f(v) \neq v$.

Es seien $W := \mathbb{R}(f(v) - v)^\perp$ und $U := (\mathbb{R}v)^\perp$, sowie s_W die Spiegelung mit $Fix(s_W) = W$.

Wegen $f(v) = \frac{1}{2}(f(v) - v) + \frac{1}{2}(f(v) + v) \in W^\perp \oplus W$ ist
$p_W(f(v)) = \frac{1}{2}(f(v) + v)$ und $s_W(f(v)) = 2p_W(f(v)) - f(v) = v$.

Daher sind $\mathbb{R}v$ und U stabil unter der orthogonalen Funktion
$s_W \circ f$.

Nach Induktionsannahme gibt es höchstens $n - 1$ Spiegelungen $s_1, \ldots, s_k$ in U so, dass $(s_W \circ f)|_U = s_1 \circ \ldots \circ s_k$.

Wir setzen für $1 \leq i \leq k$ die Spiegelungen s_i durch $s_i(v) := v$ zu Spiegelungen in V fort und bezeichnen diese wieder mit s_i. Dann ist $s_W \circ f = s_1 \circ \ldots \circ s_k$ und $f = s_W \circ s_1 \circ \ldots \circ s_k$.

Definition 99: Es seien s eine Spiegelung in V und $0 \neq u$ ein Element des parallelen Untervektorraums W von $Fix(s)$.
Dann heißt $t_u \circ s$ *Gleitspiegelung* (um die Hyperebene $Fix(s)$).

Satz 100 : *Es sei f eine Isometrie, deren linearer Anteil g eine Spiegelung ist. Dann gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in Fix(g)$ und $v \in Fix(g)^{\perp}$ so, dass $u+v = f(0)$ ist. Es gilt:*

(1) *Wenn $u = 0$ ist, dann ist f eine Spiegelung um $\frac{1}{2}v + Fix(g)$.*
(2) *Wenn $u \neq 0$ ist, dann ist $f = t_u \circ (t_v \circ g)$ eine Gleitspiegelung um die Hyperebene $\frac{1}{2}v + Fix(g)$ und $Fix(f)$ ist leer.*

Beweis:

(1) Es sei $x \in Fix(g)$. Wegen $g(v) = -v$ ist

$$(t_v \circ g)\left(\frac{1}{2}v + x\right) = v + \frac{1}{2}g(v) + x = \frac{1}{2}v + x.$$

Daher ist die Hyperebene $\frac{1}{2}v + Fix(g)$ in $Fix\,(t_v \circ g)$ enthalten.
Wenn $v = 0$ ist, dann ist $t_v \circ g = g \neq \mathrm{Id}_V$.
Wenn $v \neq 0$ ist, dann ist $(t_v \circ g)\,(v) = v - v = 0$ und daher $t_v \circ g \neq \mathrm{Id}_V$.
Daher ist $Fix(t_v \circ g) \neq V$ und $Fix(t_v \circ g) = \frac{1}{2}v + Fix(g)$.

(2) Sei $u \neq 0$. Nach (1) ist nur noch zu zeigen, dass $Fix(f)$ leer ist. Sei $s := t_v \circ g$. Wäre $x \in Fix(f)$, dann wäre $f(f(x)) = f(x) = x$. Daher ist $x = (t_u \circ s)((t_u \circ s)(x)) = u + s(u + s(x)) =$
$= u + v + g(u + v + g(x)) = u + v + u - v + x = 2u + x$, also $u = 0$, Widerspruch zu $u \neq 0$.

§10. Isometrien der Ebene

In diesem Abschnitt sei V ein zweidimensionaler orientierter euklidischer Raum.

Wir werden die folgenden Eigenschaften der Funktionen Sinus und Cosinus verwenden:

Hilfssatz 101 :

(1) *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha), \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha),$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)\ .$$

„Sinus und Cosinus sind 2π-periodische Funktionen, Sinus ist eine ungerade und Cosinus eine gerade Funktion“.

(2) *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\ .$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0\ , & \cos(0) &= 1\ , & \sin(\frac{\pi}{2}) &= 1\ , \\ \cos(\frac{\pi}{2}) &= 0\ , & \sin(\pi) &= 0\ , & \cos(\pi) &= -1\ . \end{aligned}$$

Beweis: Siehe Analysis 1.

Satz 102: *Es seien $\underline{u} = (u_1, u_2)$ eine positiv orientierte ON-Basis von V und*

$$(-)^{\perp} : V \longrightarrow V \quad , \quad v \longmapsto v^{\perp}\ ,$$

die durch $u_1^{\perp} := u_2$ und $u_2^{\perp} := -u_1$ definierte lineare Funktion.

(1) *Die Funktion $(-)^{\perp}$ ist orthogonal.*
(2) *Für alle Vektoren $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ ist $v^{\perp}$ der einzige Vektor mit der Eigenschaft, dass $(v, v^{\perp})$ eine positiv orientierte ON-Basis von V ist.*
(3) *Für alle Vektoren $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1 = \|w\|$ gibt es genau eine Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$ so, dass*

$$w = \cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^{\perp}$$

ist. Wenn $\alpha \in [0, \pi]$ bzw. $\alpha \in [\pi, 2\pi[$, dann ist α bzw. $2\pi - \alpha$ der Winkel zwischen v und w.

Beweis:

(1) Die Matrix von $(-)^{\perp}$ bezüglich $\underline{u}$ ist die orthogonale Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(2) Sei $v = au_1 + bu_2$. Dann ist $v^{\perp} = -bu_1 + au_2$, also

$$(v, v^{\perp}) = \underline{u} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ .$$

Wegen $\|v\| = 1$ ist $a^2 + b^2 = 1$. Somit ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix mit Determinante 1 und $(v, v^{\perp})$ ist eine positiv orientierte ON-Basis.

Sei $w = cu_1 + du_2$ so, dass (v, w) eine positiv orientierte ON-Basis von V ist. Aus $\langle v, w\rangle = 0$ folgt $(c, d) \in \mathbb{R}(-b, a)$, wegen $\|w\| = 1$ ist dann $(c, d) = (-b, a)$ oder $(c, d) = (b, -a)$. Weil (v, w) positiv orientiert ist, muss $(c, d) = (-b, a)$ sein.
(3) Sei β der Winkel zwischen v und w. Dann ist

$$w = \langle v, w\rangle v + \langle v^{\perp}, w\rangle v^{\perp} = \cos(\beta)v + \langle v^{\perp}, w\rangle v^{\perp}$$

und

$$\cos^2(\beta) + \langle v^{\perp}, w\rangle^2 = \|w\|^2 = 1\ .$$

Wenn $\langle v^\perp, w\rangle \geq 0$ ist, dann ist $\langle v^\perp, w\rangle = \sin(\beta)$ und $\alpha := \beta$.
Wenn $\langle v^\perp, w\rangle \leq 0$ ist, dann ist $\langle v^\perp, w\rangle = -\sin(\beta)$ und
$\alpha := 2\pi - \beta$.

Definition 103 : Es seien $u, v, w \in V$, $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Die eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit

$$\|w\|^{-1} w = \cos(\alpha)\|v\|^{-1} v + \sin(\alpha)\|v\|^{-1} v^\perp$$

heißt *orientierter Winkel von der Halbgeraden $u + \mathbb{R}_{\geq 0} v$ nach* $u + \mathbb{R}_{\geq 0} w$ oder kurz *orientierter Winkel von v nach w.*

Satz 104 : *Es seien $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ und α der orientierte Winkel von v nach w. Dann ist $2\pi - \alpha$ der orientierte Winkel von w nach v.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $\|v\| = 1 = \|w\|$ ist. Dann ist

$$w = \cos(\alpha) v + \sin(\alpha) v^\perp$$

und

$$w^\perp = \cos(\alpha) v^\perp + \sin(\alpha) v^{\perp\perp} = \cos(\alpha) v^\perp - \sin(\alpha) v \ .$$

Daher ist

$$v = \cos(\alpha) w - \sin(\alpha) w^\perp = \cos(2\pi - \alpha) w + \sin(2\pi - \alpha) w^\perp \ .$$

Definition 105 : Es seien $\alpha \in [0, 2\pi[$, $z \in V$ und $(-)^\perp$ die in Satz 102 definierte Funktion. Dann heißt die Funktion

$$d_\alpha : V \longrightarrow V \quad , \quad v \longmapsto \cos(\alpha) v + \sin(\alpha) v^\perp \ ,$$

Drehung in V um 0 mit *Drehwinkel* α.
Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ ist dann α der orientierte Winkel von v nach $d_\alpha(v)$.
Die Funktion

$$d_{z,\alpha} : V \longrightarrow V \quad , \quad x \longmapsto z + d_\alpha(x - z) \ ,$$

heißt *Drehung* (in V) um den *Drehpunkt* z mit *Drehwinkel* α.
Es ist $d_{0,\alpha} = d_\alpha$.

Satz 106 :

(1) *Für alle $\alpha \in [0, 2\pi[$ ist die Funktion d_α linear. Ihre Matrix bezüglich jeder positiv orientierten ON-Basis von V ist*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt Drehmatrix zum Winkel α.
Insbesondere ist d_α *orthogonal und* $\det(d_\alpha) = 1$.

(2) *Jede orthogonale Funktion von* V *nach* V *mit Determinante* 1 *ist eine Drehung um* 0.

(3) *Für alle* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *und* $z \in V$ *ist*

$$d_{z,\alpha} = t_{z-d_\alpha(z)} \circ d_\alpha.$$

Jede Drehung ist eine Isometrie.

Beweis: Es sei $\underline{u} = (u_1, u_2)$ eine positiv orientierte *ON*- Basis von V.

(1) Wegen $d_\alpha = \cos(\alpha)\mathrm{Id}_V + \sin(\alpha)(-)^\perp$ ist d_α linear.
Nach Satz 102, (2), ist $u_1^\perp = u_2$ und $u_2^\perp = -u_1$, also ist

$$d_\alpha(u_1) = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)u_2$$

und

$$d_\alpha(u_2) = \cos(\alpha)u_2 - \sin(\alpha)u_1.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

die Matrix von d_α bezüglich $\underline{u}$.
Diese Matrix ist orthogonal und ihre Determinante ist 1.

(2) Es seien $f : V \longrightarrow V$ eine orthogonale Funktion mit $\det(f) = 1$ und α der orientierte Winkel von u_1 nach $f(u_1)$. Dann ist $f(u_1) = d_\alpha(u_1)$. Weil $(f(u_1), f(u_2))$ eine positiv orientierte ON-Basis von V ist, muss $f(u_2) = f(u_1)^\perp$ sein (Satz 102, (2)). Also ist auch $f(u_2) = d_\alpha(u_2)$, somit $f = d_\alpha$.

(3) Nach (1) ist d_α linear und orthogonal, daher ist für alle $x \in V$

$$d_{z,\alpha}(x) = z + d_\alpha(x) - d_\alpha(z) = t_{z-d_\alpha(z)}(d_\alpha(x))$$

und $d_{z,\alpha} = t_{z-d_\alpha(z)} \circ d_\alpha$ eine Isometrie.

Definition 107 : Es seien W ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f : W \longrightarrow W$ eine affine Funktion. Dann heißt f *orientierungserhaltend* bzw. *orientierungsumkehrend*, wenn die Determinante des linearen Anteils von f eine positive bzw. negative Zahl ist.

Beispiel 108 : Drehungen in V sind orientierungserhaltend, Spiegelungen in V sind orientierungsumkehrend.

Satz 109 : *Es sei* f *eine Isometrie von* V.
Wenn $Fix(f)$ *eine Gerade ist, dann ist* f *eine Spiegelung.*
Wenn $Fix(f)$ *ein Punkt ist, dann ist* f *eine Drehung um diesen.*

Wenn $Fix(f)$ leer und f orientierungserhaltend ist, dann ist f eine Translation.
Wenn $Fix(f)$ leer und f orientierungsumkehrend ist, dann ist f eine Gleitspiegelung.

Beweis: Sei $u := f(0)$ und g der lineare Anteil von f. Nach Hilfssatz 93 ist $Fix(f)$ entweder leer oder ein affiner Unterraum mit parallelem Vektorraum $Fix(g)$.
Nach Satz 106, (2), und nach Satz 98 ist g eine Drehung, wenn g orientierungserhaltend ist, und eine Spiegelung, wenn g orientierungsumkehrend ist.

Wenn $Fix(f)$ eine Gerade ist, dann ist f wegen $dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ eine Spiegelung.

Wenn $Fix(f) = \{z\}$ ein Punkt ist, ist auch $Fix(g)$ ein Punkt. Dann ist g eine Drehung um 0 und nicht Id_V. Weiters ist $z = f(z) = u + g(z)$. Daher ist für alle $x \in V$

$$f(x) = u + g(x) = z - g(z) + g(x) = z + g(x - z),$$

somit ist f eine Drehung um z mit demselben Drehwinkel wie g.

Wenn $Fix(f)$ leer ist, liegt u nicht im Bild von $\mathrm{Id}_V - g$. Daher ist

$$k := \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(Id_V - g)) = 2 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(Id_V - g)) \geq 1.$$

Wenn $k = 2$ ist, dann ist $g = \mathrm{Id}_V$ und f eine Translation.
Wenn $k = 1$ ist, dann ist g eine Spiegelung und f eine Gleitspiegelung.

Satz 110 : *Für $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ mit $\alpha + \beta \geq 2\pi$ sei $d_{\alpha+\beta} := d_{\alpha+\beta-2\pi}$.*
Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$:

$$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}.$$

Insbesondere ist $d_\alpha^{-1} = d_{2\pi-\alpha}$ und $d_\alpha \circ d_\beta = d_\beta \circ d_\alpha$.

Beweis: Die Matrizen von d_α, d_β bezüglich einer positiv orientierten ON-Basis von V sind

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

die Matrix von $d_\alpha \circ d_\beta$.

Beispiel 111 : Es seien v, $w \in V\backslash\{0\}$, α der orientierte Winkel von v nach w und s_v, s_w die Spiegelungen mit $Fix(s_v) = \mathbb{R}v$, $Fix(s_w) = \mathbb{R}w$. O.E.d.A. nehmen wir $\|v\| = \|w\| = 1$ an. Wir berechnen $s_v \circ s_w$. Da $s_v \circ s_w$ linear ist und $\det(s_v \circ s_w) = \det(s_v)\det(s_w) = (-1)^2 = 1$, ist $s_v \circ s_w$ eine Drehung d_β um 0.
Sei $v^\perp \in V$ so, dass $(v, v^\perp)$ eine positiv orientierte ON-Basis ist. Dann ist

$$\begin{aligned} d_\beta(d_\alpha(v)) &= d_\beta(w) = (s_v \circ s_w)(w) = s_v(w) = \\ &= 2\langle v,w\rangle\, v - w = 2\cos(\alpha)v - \left(\cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^\perp\right) = \\ &= \cos(2\pi-\alpha)v + \sin(2\pi-\alpha)v^\perp = d_{2\pi-\alpha}(v) = d_\alpha^{-1}(v). \end{aligned}$$

Daher ist $d_\beta \circ d_\alpha = d_\alpha^{-1}$, $s_v \circ s_w = d_\beta = d_{2\alpha}^{-1}$ und $s_w \circ s_v = (s_v \circ s_w)^{-1} = d_{2\alpha}$.

Beispiel 112 : Wir betrachten $\mathbb{C}$ als 2-dimensionalen, durch die Basis $(1,i)$ orientierten euklidischen Raum.
Für $y,z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ seien α,β die orientierten Winkel von 1 nach y,z. Wir schreiben $e^{i\alpha}$ für $d_\alpha(1) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.
Dann ist $y = |y|\,e^{i\alpha}$, $z = |z|\,e^{i\beta}$ („Polardarstellung von komplexen Zahlen“) und $y \cdot z = |y| \cdot |z| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$.
(„Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.“)

Beispiel 113 : Die Punkte $u,v,w \in V$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks. Die orientierten Winkel von $v-u$ bzw. $w-v$ bzw. $u-w$ nach $w-u$ bzw. $u-v$ bzw. $v-w$ seien α bzw. β bzw. γ. Wir können annehmen, dass $\alpha,\beta,\gamma \in [0,\pi[$ ist .
Dann ist

$$\begin{aligned} d_{\alpha+\beta+\gamma}(\|u-w\|^{-1}(u-w)) &= (d_\alpha \circ d_\beta \circ d_\gamma)(\|u-w\|^{-1}(u-w)) = \\ &= d_\alpha(d_\beta(\|v-w\|^{-1}(v-w)) = -d_\alpha(d_\beta(\|w-v\|^{-1}(w-v)) = \\ &= -d_\alpha(\|u-v\|^{-1}(u-v)) = d_\alpha(\|v-u\|^{-1}(v-u)) = \\ &= -\|u-w\|^{-1}(u-w) = d_\pi(\|u-w\|^{-1}(u-w)) \end{aligned}$$

und $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.
(„Die Winkelsumme im Dreieck ist π.“)

Beispiel 114 : Wir betrachten in der Ebene, die wir nach Wahl eines Nullpunktes und einer Basis mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, zwei drehbare Scheiben. Die erste ist um den Punkt $(0,0)$ drehbar, die zweite ist auf der ersten im Punkt (a,b) montiert. Die zweite Scheibe wird um den Winkel β, die erste um den Winkel α gedreht.
Dann wird der Punkt (x,y) auf der zweiten Scheibe in den Punkt

$$d_\alpha(d_{(a,b),\beta}(x,y)) = d_\alpha(a,b) + d_{\alpha+\beta}(x-a, y-b) =$$

$$= (a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha), a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha)) + ((x-a)\cos(\alpha+\beta) -$$
$$-(y-b)\sin(\alpha+\beta), (x-a)\sin(\alpha+\beta) + (y-b)\cos(\alpha+\beta))$$

bewegt.

§11. Zeigerrechnung

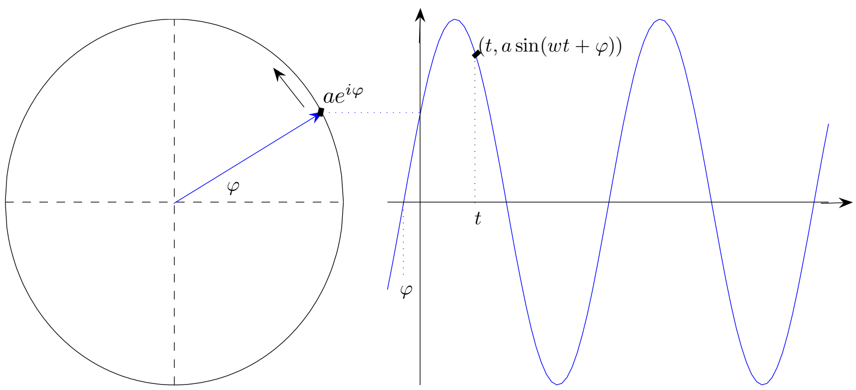
Ein Zeiger (zum Beispiel der Sekundenzeiger einer Uhr) der Länge a dreht sich in einer Ebene mit der Kreisfrequenz ω um einen Punkt $\mathcal{O}$. Wir identifizieren diese Ebene mit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{O}$ mit $0_{\mathbb{C}} = (0,0)$. Zur Zeit 0 sei die Spitze des Zeigers im Punkt $ae^{i\varphi} = (a\cos(\varphi), a\sin(\varphi))$. Zur Zeit t befindet sie sich dann im Punkt

$$ae^{i(\omega t+\varphi)} = (a\cos(\omega t+\varphi), a\sin(\omega t+\varphi)).$$

Die Funktion, die der Zeit t den Abstand der Zeigerspitze von der reellen Geraden $\mathbb{R}(1,0)$ zuordnet, ist daher

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a\sin(\omega t+\varphi) \end{array}.$$

Diese Funktion beschreibt eine *harmonische Schwingung* mit *Kreisfrequenz* ω, *Amplitude* a und *Anfangsphase* φ.



Drehen sich zwei Zeiger mit derselben Kreisfrequenz ω um denselben Punkt, aber mit eventuell verschiedenen Längen a_1, a_2 und Anfangsphasen φ_1, φ_2, dann heißt $\varphi_1 - \varphi_2$ die *Phasendifferenz* der entsprechenden harmonischen Schwingung. Der Abstand der Summe

$$ae^{i(\omega t+\varphi)} := a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

der Zeigerspitzen von der reellen Geraden $\mathbb{R}(1,0)$ ist die Summe der Abstände der zwei Zeigerspitzen von dieser Geraden, also

$$a\sin(\omega t+\varphi) = a_1\sin(\omega t+\varphi_1) + a_2\sin(\omega t+\varphi_2).$$

Die Summe von zwei harmonischen Schwingungen mit derselben Kreisfrequenz ist daher wieder eine harmonische Schwingung, ihre Amplitude bzw. Anfangsphase ist a bzw. φ. Um diese zu berechnen, muss die *Polardarstellung* $ae^{i(\omega t+\varphi)}$ der Summe der zwei komplexen Zahlen, die den zwei Zeigerspitzen entsprechen, berechnet werden.

Diese Überlegungen führen zur *Zeigerrechnung*, mit der die folgende Aufgabe gelöst wird:
Es seien n eine positive ganze Zahl und $\omega, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Gesucht sind reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \sin(\omega t + \varphi_\ell) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

ist.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die komplexen Zahlen

$$z_\ell(t) := a_\ell e^{i(\omega t+\varphi_\ell)} := a_\ell(\cos(\omega t + \varphi_\ell) + i \sin(\omega t + \varphi_\ell)),\ 1 \leq \ell \leq n.$$

Dann ist $a_\ell \sin(\omega t + \varphi_\ell)$ der Imaginärteil von $z_\ell(t)$ und $\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \sin(\omega t + \varphi_\ell)$ der Imaginärteil von

$$z(t) := \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell(t).$$

Es ist

$$z(t) = \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell(t) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell e^{i(\omega t+\varphi_\ell)} = e^{i\omega t} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell e^{i\varphi_\ell} = e^{i\omega t} z(0)\,.$$

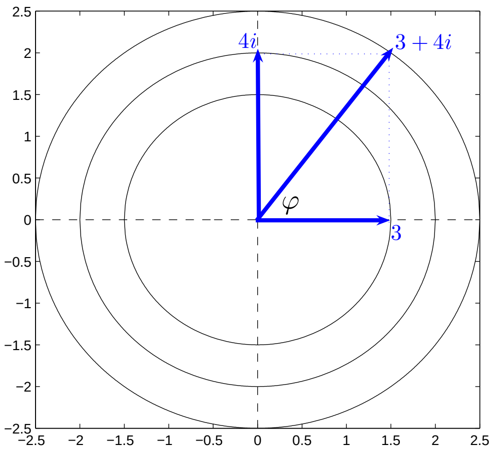
Wir erhalten daher die gesuchten Zahlen a und φ aus der Polardarstellung $z(0) = a(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = ae^{i\varphi}$ von $z(0)$, dabei ist a der Abstand zwischen $z(0)$ und 0 und φ der orientierte Winkel von $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot z(0)$.

Beispiel 115 : Berechne reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(\omega t) + 4 \cdot \cos(\omega t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ist.
Wegen $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ist $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Weiters sind
$z_1(t) = 3(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$, $z_2(t) = 4(\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$ und $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, also $z(0) = 3 + 4i$.
Der Abstand zwischen $z(0)$ und 0 ist $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, der Tangens des orientierten Winkels von $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (3 + 4i)$ ist $\frac{4}{3}$. Daher ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(\omega t) + 4 \cdot \cos(\omega t) = 5 \cdot \sin(\omega t + \arctan(\frac{4}{3}))\,.$$



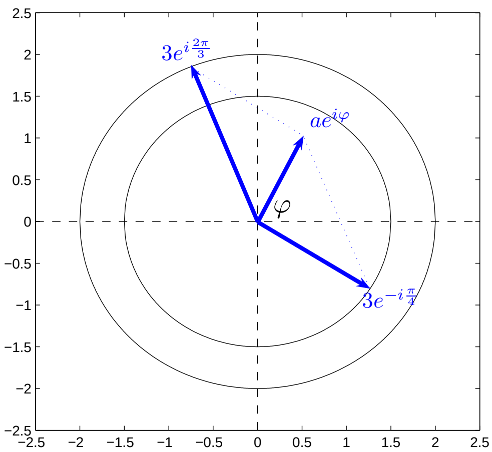
Beispiel 116 : Berechne reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + 4 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ist.
Es ist $z_1(0) = 3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, $z_2(0) = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$ und $z(0) = z_1(0) + z_2(0)$, also

$$z(0) = 3\cos(-\frac{\pi}{4}) + 4\cos(\frac{2\pi}{3}) + i(3\sin(-\frac{\pi}{4}) + 4\sin(\frac{2\pi}{3}))\,.$$

Somit ist $z(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 - i(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3})$ und $a \approx 1.34825$, $\varphi \approx 1.48069$.



§12. Isometrien des Raumes

In diesem Abschnitt sei V ein dreidimensionaler orientierter euklidischer Raum.

Definition 117 : Eine orientierungserhaltende Isometrie von V heißt *(eigentliche) Bewegung* in V.

Definition 118 : Es seien E ein zweidimensionaler orientierter Untervektorraum von V, $z \in E$ und d eine Drehung um z in E. Für alle $v \in V$ schreiben wir v_1 bzw. v_2 für die orthogonale Projektion von v auf E bzw. $E^{\perp}$. Die Funktion

$$f : V \to V \quad , \quad v = v_1 + v_2 \longmapsto d(v_1) + v_2 \ ,$$

heißt *Drehung (in V)* um die *Drehachse* $z + E^{\perp}$ und mit *Drehebene* E.
Sei $0 \neq u \in E^{\perp}$ und $f \neq \mathrm{Id}_V$. Dann heißt die Funktion $t_u \circ f$ *Schraubung* um die Drehachse $z + E^{\perp}$.
Sei s eine Spiegelung in V, deren Fixmenge zu E parallel ist. Dann heißt die Funktion $s \circ f$ *Drehspiegelung* um die Drehachse $z + E^{\perp}$ und mit Spiegelungsebene $Fix(s)$.
Der Drehwinkel von d wird auch *Drehwinkel von f bzw. $t_u \circ f$ bzw. $s \circ f$* genannt.

Satz 119 :

(1) *Drehungen, Schraubungen und Drehspiegelungen sind Isometrien.*
(2) *Die Fixmenge einer Drehung $\neq \mathrm{Id}_V$ ist ihre Drehachse. Die Fixmenge einer Schraubung ist leer.*
(3) *Sei g eine Drehung mit $g(0) = 0$. Ist $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ eine ON-Basis von V so, dass (v_1, v_2) eine ON-Basis der Drehebene E von g ist, dann ist*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix von g bezüglich $\underline{v}$. Dabei ist α der Drehwinkel von $g|_E$ bezüglich der durch (v_1, v_2) gegebenen Orientierung von E. Insbesondere ist $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathrm{spur}(g) - 1)$.
(4) *Drehungen und Schraubungen sind orientierungserhaltend, Drehspiegelungen sind orientierungsumkehrend.*

Beweis:

(1) Es seien f eine Drehung mit Drehebene E und $d := f\,|_E$. Für $v, w \in V$ ist $d(v_1) - d(w_1) \in E$ und $v_2 - w_2 \in E^{\perp}$. Daher ist

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\|^2 &= \|d(v_1) - d(w_1) + v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|d(v_1) - d(w_1)\|^2 + \|v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|v_1 - w_1\|^2 + \|v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 . \end{aligned}$$

Somit ist f eine Isometrie.
(2) nachprüfen.
(3) Wegen (1) und $g(0) = 0$ folgt aus Satz 75 , dass g linear ist. Die Behauptung folgt daher aus Satz 106 .
(4) Folgt aus (3).

Satz 120:

(1) *Jede Bewegung in V ist eine Drehung, eine Schraubung oder eine Translation.*
(2) *Jede orientierungsumkehrende Isometrie in V ist eine Spiegelung, Gleitspiegelung oder Drehspiegelung.*

Beweis: Es sei $g : V \to V$ eine orthogonale Funktion. Nach Satz **??** gibt es einen 1-dimensionalen, unter g stabilen Untervektorraum W von V. Aus Satz 87 folgt, dass $g\,|_W = \mathrm{Id}_W$ oder $g\,|_W = -\mathrm{Id}_W$.
Nach Satz 89 ist auch $W^{\perp}$ stabil unter g. Nach Satz 109 ist die Einschränkung von g auf $W^{\perp}$ eine Drehung oder eine Spiegelung. Es ist
$\det(g) = \det(g\,|_W) \cdot \det(g\,|_{W^{\perp}})$.

(1) Sei $\det(g) = 1$. Dann ist entweder
$g\,|_W = \mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$ eine Drehung oder
$g\,|_W = -\mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$eine Spiegelung.
Im ersten Fall ist g eine Drehung um die Drehachse W, im zweiten die Drehung um die Drehachse $Fix(g\,|_{W^{\perp}})$ mit
Drehwinkel π.
Sei $u \in Fix(g)$ und $v \in Fix(g)^{\perp}$. Die Bewegung $t_{u+v} \circ g$ ist
eine Translation, wenn $g = \mathrm{Id}_V$,
eine Drehung, wenn $u = 0$,
und eine Schraubung, wenn $u \neq 0$ und $g \neq \mathrm{Id}_V$.
(2) Sei $\det(g) = -1$. Dann ist entweder
$g\,|_W = \mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$eine Spiegelung oder
$g\,|_W = -\mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$ eine Drehung.
Im ersten Fall ist g die Spiegelung um $W \oplus Fix(g\,|_{W^{\perp}})$, im zweiten Fall ist g eine Drehspiegelung mit Drehachse W. Das Zusammensetzen von g mit einer Translation ergibt nach Satz 100 eine Spiegelung, Gleitspiegelung oder Drehspiegelung.

Beispiel 121 : Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad (a,b,c) \longmapsto (c,a,b) \ ,$$

ist eine Isometrie, wegen $f(0) = 0$ sogar orthogonal.
Es ist $\det(f) = 1$, $\operatorname{spur}(f) = 0$ und der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 ist $\mathbb{R}(1,1,1)$.
Daher ist f eine Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}(1,1,1)$ mit Drehwinkel α, wobei $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 122 : Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad (a,b,c) \longmapsto (-b,a,-c) \ ,$$

ist eine Isometrie, wegen $f(0) = 0$ sogar orthogonal.
Es ist $\det(f) = -1$, $\operatorname{spur}(f) = -1$ und der Eigenraum von f zum Eigenwert -1 ist $\mathbb{R}(0,0,1)$.
Daher ist f eine Drehspiegelung um die Drehachse $\mathbb{R}(0,0,1)$
mit Drehwinkel α, wobei $\cos(\alpha) = 0$.

Satz 123 : *Es seien $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ eine ON-Basis von V und f eine Bewegung in V mit $f(0) = 0$. Dann gibt es Drehungen g_α, g_γ mit Drehachse $\mathbb{R}v_1$ und Drehwinkeln $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$ und eine Drehung h_β mit Drehachse $\mathbb{R}v_3$ und Drehwinkel $\beta \in [0, \pi]$ so, dass*

$$f = g_\alpha \circ h_\beta \circ g_\gamma$$

ist. Die Zahlen α, β, γ heißen Euler-Winkel *von f.*
Für Matrizen bedeutet dieser Satz: Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = 1$ kann als Produkt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$ und $\beta \in [0, \pi]$ sind.

Beweis: Sei $w := f^{-1}(v_1) \in V$. Sei g_γ eine Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}v_1$ so, dass $g_\gamma(w) \in (\mathbb{R}v_3)^\perp$. Dann gibt es eine Drehung h_β mit Drehachse $\mathbb{R}v_3$ und Drehwinkel $\beta \in [0, \pi]$ so, dass $h_\beta(g_\gamma(w)) = v_1$. Die Funktion $h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1}$ ist eine Drehung, wegen $(h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1})(v_1) = v_1$ ist ihre Drehachse $\mathbb{R}v_1$. Setze $g_\alpha := (h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1})^{-1}$.

§13. Symmetriegruppen

Definition 124: Es seien $M_1,\ldots,M_k$ Teilmengen von V. Dann heißt die Menge $Sym_V(M_1,\ldots,M_k) :=$

$$= \{f : V \to V \mid f \text{ Isometrie, } f(M_i) = M_i, i = 1,\ldots,k\}$$

Symmetriegruppe von $M_1,\ldots,M_k$. Ihre Elemente heißen *Symmetrieoperationen* von $M_1,\ldots,M_k$.

Satz 125:

(1) *Die Symmetriegruppe von $M_1,\ldots,M_k$ ist mit der Zusammensetzung von Funktionen eine Gruppe.*
(2) *Ist eine der Mengen $M_1,\ldots,M_k$ endlich, dann ist ihr Schwerpunkt ein Fixpunkt für alle Symmetrieoperationen von $M_1,\ldots,M_k$.*

Beweis:

(1) kann leicht nachgeprüft werden.
(2) Sei M_1 endlich. Nach Satz 39 ist für jede Symmetrieoperation f das Bild des Schwerpunktes von M_1 der Schwerpunkt des Bildes $f(M_1) = M_1$.

Satz 126: *Es seien $M_1,\ldots,M_k$ Teilmengen von V. M_1 sei eine endliche, nicht-leere Menge, deren affine Hülle eine Hyperebene in V oder gleich V ist. Dann ist $Sym_V(M_1,\ldots,M_k)$ eine endliche Menge.*
Diese kann wie folgt berechnet werden:
Sei z der Schwerpunkt von M_1 und W die affine Hülle von M_1.

Fall *1: $z = 0$. Dann ist W ein Untervektorraum von V.*
Wähle eine Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von W aus Elementen von M_1. Wenn $V \neq W$, ergänze diese durch ein Element $v_{n+1} \in W^{\perp}$ zu einer Basis von V.
$Sym_V(M_1,\ldots,M_k)$ ist dann in der endlichen Menge
$\{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid g(v_i) \in M_1, 1 \leq i \leq n, g(v_{n+1}) \in \{v_{n+1}, -v_{n+1}\}\}$
enthalten.
Wähle aus dieser die Elemente von $Sym_V(M_1,\ldots,M_k)$ aus.

Fall *2: $z \neq 0$.*
Dann ist 0 der Schwerpunkt von $t_{-z}(M_1)$.
Berechne $Sym_V(t_{-z}(M_1),\ldots,t_{-z}(M_k))$ wie in Fall 1. Dann ist
$Sym_V(M_1,\ldots,M_k) = t_z \circ Sym_V(t_{-z}(M_1),\ldots,t_{-z}(M_k)) \circ t_{-z}$.

Beweis: Übung.

Beispiel 127 : Wir stellen das Wassermolekül H_2O durch zwei Teilmengen $M_1 = \{O\}, M_2 = \{H, H'\}$ eines 3-dimensionalen euklidischen Raumes V dar. Der Winkel zwischen H und H' liegt in $]0, \pi[$.
Die Symmetriegruppe dieses Moleküls ist $Sym_V(M_1, M_2)$.
Es seien T die affine Hülle von O, H, H' und G die Gerade durch O und $\frac{1}{2}(H + H')$. Dann ist $Sym_V(M_1, M_2) =$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Id}_V, \text{ Drehung um die Drehachse } G \text{ mit Drehwinkel } \pi, \\ \text{Spiegelung um } T, \text{ Spiegelung um die Ebene } O + (H - H')^{\perp} \end{array} \right\}.$$

KAPITEL 3

Bilinearformen, quadratische Funktionen und Quadriken

Es sei K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

§1. Symmetrische Bilinearformen

Definition 128 : Eine bilineare Funktion $b : V \times V \to K$ heißt *Bilinearform auf* V.
Eine Bilinearform b ist *symmetrisch*, wenn für alle $v, w \in V$

$$b(v,w) = b(w,v)$$

ist.
Für eine Basis $\underline{v}$ von V heißt

$$M(b,\underline{v}) := \left(b\left(v_i, v_j\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

die *Matrix von b* bezüglich $\underline{v}$. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist *symmetrisch*, wenn

$$A^\top = A$$

ist.

Beispiel 129 : Wenn V ein reeller Vektorraum ist, dann ist jedes Skalarprodukt auf V eine symmetrische Bilinerarform. Die Matrix jedes Skalarproduktes bezüglich jeder *ON*-Basis ist I_n.

Beispiel 130 : Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist die Funktion

$$K^{n\times 1} \times K^{n\times 1} \to K \quad , \quad (x,y) \longmapsto x^\top \cdot A \cdot y \ ,$$

eine Bilinearform und ihre Matrix bezüglich der Standardbasis ist A.

Satz 131 : *Es seien b eine Bilinearform auf V,* $\underline{v}$ *eine Basis von V und A die Matrix von b bezüglich* $\underline{v}$ *. Dann gilt:*

(1) *Für alle* $x, y \in K^{n\times 1}$ *ist*

$$b(\underline{v}x, \underline{v}y) = x^\top \cdot A \cdot y \ .$$

(2) *Die Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn b symmetrisch ist.*
(3) *Für alle* $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ *ist*

$$M(b, \underline{v}S) = S^\top \cdot A \cdot S \ .$$

Beweis:

(1)

$$b\left(\underline{v}x,\underline{v}y\right)=b\left(\sum_{i=1}^{n}x_iv_i,\sum_{j=1}^{n}y_jv_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j\cdot b\left(v_i,v_j\right)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_iA_{ij}y_j=x^\top\cdot A\cdot y.$$

(2) Aus b symmetrisch folgt
$A_{ij}=b\left(v_i,v_j\right)=b\left(v_j,v_i\right)=A_{ji}, 1\le i,j\le n.$
Umgekehrt folgt aus A symmetrisch, dass
$x^\top\cdot A\cdot y=\left(x^\top\cdot A\cdot y\right)^\top=y^\top\cdot A^\top\cdot x=y^\top\cdot A\cdot x$
ist, nach (1) ist b daher symmetrisch.

(3) Für $1\le i,j\le n$ ist

$$b\left(\underline{v}S_{-i},\underline{v}S_{-j}\right)=\sum_{k,\ell=1}^{n}S_{ki}A_{k\ell}S_{\ell j}=\left(S^\top\cdot A\cdot S\right)_{ij}.$$

Definition 132: Zwei Matrizen $A,B\in K^{n\times n}$ heißen *kongruent*, wenn es eine Matrix $P\in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$B=P^\top\cdot A\cdot P$$

gibt. (Zwei kongruente Matrizen beschreiben dieselbe Bilinearform bezüglich zweier Basen von V).

Definition 133: Für $d_1,\dots,d_n\in K$ sei

$$Diag\left(d_1,\dots,d_n\right):=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}\in K^{n\times n}$$

die Matrix in Diagonalform mit Diagonalelementen $d_1,\dots,d_n$.

Satz 134: *Es seien $A\in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und r der Rang von A. Dann gibt es $d_1,\dots,d_r\in K\setminus\{0\}$ so, dass A und*

$$Diag\left(d_1,d_2,\dots,d_r,0,\dots,0\right)\in K^{n\times n}$$

kongruent sind. Mit dem folgenden Verfahren können $P\in \mathrm{GL}_n(K)$ und $d_1,\dots,d_r\in K$ so berechnet werden, dass

$$P^\top\cdot A\cdot P=Diag\left(d_1,d_2,\dots,d_r,0,\dots,0\right)$$

ist:

(1) *Setze $C:=\left(A\mid I_n\right)$ und $i:=1$.*

(2) *Wenn $i > n$ oder $C_{k\ell} = 0$ für alle $k, \ell \in \{i, ..., n\}$ ist, dann ist*

$$C = \left(Diag\,(d_1, ..., d_{i-1}, 0, ..., 0) \mid P^\top\right)$$

und das Verfahren zu Ende.

(3) *Falls $C_{jj} = 0$ ist für alle $j \in \{i, ..., n\}$ und $C_{k\ell} \neq 0$ ist für Indizes $k, \ell \in \{i, ..., n\}$, addiere die k-te Zeile von C zur ℓ-ten und anschließend die k-te Spalte zur ℓ-ten. Nenne die neue Matrix wieder C.*

(4) *Falls $C_{ii} = 0$ ist, aber $C_{jj} \neq 0$ ist für ein $j \in \{i+1, ..., n\}$, vertausche die j-te mit der i-ten Zeile von C und dann die j-te mit der i-ten Spalte. Nenne die neue Matrix wieder C.*

(5) *Falls $C_{ii} \neq 0$ ist, subtrahiere für $j = i+1, ..., n$ die $(C_{ii}^{-1} \cdot C_{ji})$-fache i-te Zeile von C von der j-ten und dann die $(C_{ii}^{-1} \cdot C_{ji})$-fache i-te Spalte von der j-ten. Nenne die neue Matrix wieder C, setze $i := i+1$ und fahre mit (2) fort.*

Beweis: Die im Verfahren angegebenen Umformungen von C bedeuten jeweils, dass A und I_n von rechts mit geeigneten Elementarmatrizen Q und von links mit $Q^\top$ multipliziert werden. Insbesondere sind alle Matrizen, die von den ersten n Spalten der mit C bezeichneten Matrizen gebildet werden, symmetrisch.
Mit $r = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(P^\top \cdot A \cdot P\right)$ folgt daraus die Behauptung.

Satz 135: *„Trägheitssatz von Sylvester“*

(1) *Jede komplexe symmetrische Matrix A ist kongruent zu*

$$Diag\,(1, 1, ..., 1, 0, ..., 0)\ ,$$

wobei die Anzahl der Einsen in der Diagonalmatrix gleich dem Rang von A ist. Insbesondere sind zwei komplexe symmetrische Matrizen genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Rang haben.

(2) *Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu genau einer der Matrizen*

$$I_n^{s,t} := Diag(1, ..., 1, -1, ..., -1, 0, ..., 0),$$

wobei s bzw. t die Anzahl der Einträge 1 bzw. -1 in $I_n^{s,t}$ ist. Es gilt $s + t = \operatorname{rg}(A)$. Das Paar (s,t) heißt Signatur von A.
Insbesondere sind zwei reelle symmetrische Matrizen genau dann kongruent, wenn sie die gleiche Signatur haben.

Beweis: Nach Satz 134 gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $d_1, \ldots, d_r \in K \backslash \{0\}$ so, dass $P^T \cdot A \cdot P = Diag(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots 0)$ ist.

(1) Wähle Zahlen $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ so, dass $c_i^2 = d_i^{-1}, 1 \leq i \leq r$, und setze $Q := P \cdot Diag(c_1, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0)$.
Dann ist $Q^T \cdot A \cdot Q = Diag(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

(2) Wir können annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_r$ ist.
Wähle Zahlen $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ so, dass $c_i^2 = |d_i|^{-1}$ für $1 \leq i \leq r$ ist, und setze $Q := P \cdot Diag(c_1, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0)$. Dann ist $Q^T \cdot A \cdot Q = I_n^{s,t}$, wobei s bzw. t die Anzahl der Indizes i mit $d_i > 0$ bzw. $d_i < 0$ ist.
Es ist noch zu zeigen, dass für $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aus $S^T \cdot I_n^{s',t'} \cdot S = I_n^{s,t}$ folgt, dass $s' = s$ und $t' = t$ ist. Wegen $s + t = \mathrm{rg}(I_n^{s,t})$ genügt es, $s' = s$ zu zeigen. Wir können annehmen, dass $s' \geq s$ gilt.
Sei $U := \{y \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid y_1 = \ldots = y_s = 0\}$ und
$W := \{y \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid (Sy)_{s'+1} = (Sy)_{s'+2} = \ldots = (Sy)_n = 0\}$.
Dann ist $\dim_{\mathbb{R}}(U) = n - s$ und wegen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auch $\dim_{\mathbb{R}}(W) = s'$.
Wäre $s' > s$, dann wäre

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) = n - s + s' > n$$

und daher $U \cap W \neq \{0\}$.
Für $0 \neq x \in U \cap W$ würde dann

$$0 \geq -\sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2 = x^T \cdot I_n^{s,t} \cdot x =$$

$$= (Sx)^T \cdot I_n^{s',t'} \cdot (Sx) = \sum_{i=1}^{s'} (Sx)_i^2 > 0$$

sein. Widerspruch.

§2. Positiv definite Matrizen

Definition 136 : Eine Bilinearform b auf einem reellen Vektorraum V heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$

$$b(v,v) > 0 \quad \text{bzw.} \quad b(v,v) \geq 0$$

ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{0\}$

$$x^\top \cdot A \cdot x > 0 \quad \text{bzw.} \quad x^\top \cdot A \cdot x \geq 0$$

ist.

Beispiel 137 : Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit und damit auch positiv semidefinit.
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.

Satz 138 :

(1) *Eine Bilinearform ist genau dann positiv definit bzw. positiv semidefinit, wenn ihre Matrix bezüglich einer Basis von V positiv definit bzw. positiv semidefinit ist.*
(2) *Wenn eine Matrix positiv definit bzw. positiv semidefinit ist, dann sind dies auch alle zu ihr kongruenten Matrizen.*

Beweis: Übung.

Satz 139 : *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv definit.*
(2) *Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $A = B^\top \cdot B$ ist.*
(3) *Die Signatur von A ist $(n,0)$.*

Beweis: Eine reelle Diagonalmatrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Einträge in der Diagonale positiv sind. Nach Satz 135 gibt es eine invertierbare Matrix P so, dass $P^\top \cdot A \cdot P =: D$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge $0, 1$ oder -1 sind.

(1) $\Rightarrow (2)$: Wenn A positiv definit ist, muss D nach Satz 138 auch positiv definit sein, also $D = I_n$ sein. Mit $B := P^{-1}$ folgt (2).
(2) $\Rightarrow (3)$: Nach (2) ist A kongruent zu I_n.
(3) $\Rightarrow (1)$: Nach (3) und Satz 135 ist A kongruent zu I_n. Nach Satz 138 ist A positiv definit.

Mit Aussage (3) kann überprüft werden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist.
Mit Aussage (2) können Beispiele für positiv definite symmetrische Matrizen (und damit für Skalarprodukte) konstruiert werden.
Eine Anwendung in der Analysis: Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung im Punkt p Null ist, und A ihre Hesse'sche Matrix in p. Wenn A bzw. $-A$ positiv definit ist, dann hat f in p ein isoliertes Minimum bzw. Maximum.

Satz 140 : *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv semidefinit.*
(2) *Es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A = B^\top \cdot B$ ist.*
(3) *Die Signatur von A ist $(r,0)$, wobei r der Rang von A ist.*

Beweis: Analog dem Beweis von Satz 139.

Satz 141 : *Eine symmetrische reelle Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre* Hauptminoren

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},\ 1 \leq k \leq n,$$

positive Zahlen sind.

Beweis: Für $1 \leq k \leq n$ sei

$$A(k) := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

Wenn A positiv definit ist, dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^{k\times 1} \setminus \{0\}$

$$x^\top \cdot A(k) \cdot x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^\top \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,,$$

daher ist $A(k)$ positiv definit. Aus Satz 139, (2) folgt dann, dass $\det(A(k)) > 0$ ist.

Seien nun alle Hauptminoren positiv. Wie zeigen durch Induktion nach n, dass A positiv definit ist. Nach Induktionsannahme ist $A(n-1)$ positiv definit, nach Satz 139, $(1) \Rightarrow (2)$, daher invertierbar.
Somit bilden die Zeilen von $A(n-1)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, deshalb gibt es Zahlen $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(A_{n1}, \ldots, A_{n(n-1)}) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i A(n-1)_{i-}$$

ist. Wird das c_i-fache der i-ten Zeile von A von der n-ten Zeile subtrahiert und das c_i-fache der i-ten Spalte von der n-ten Spalte, $1 \leq i \leq n$, dann erhalten wir eine zu A kongruente Matrix

$$C := \begin{pmatrix} A(n-1) & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit $d \in \mathbb{R}$. Da wir C aus A erhalten, indem wir A von links und von rechts mit Elementarmatrizen, deren Determinante 1 ist, multiplizieren, ist $\det(A) = \det(C) = \det(A(n-1)) \cdot d$.
Aus $\det(A) > 0$ und $\det(A(n-1)) > 0$ folgt $d > 0$.
Da $A(n-1)$ positiv definit ist, gibt es nach Satz 139 eine Matrix $B \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ so, dass $A(n-1) = B^\top \cdot B$ ist. Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar und $C = M^\top \cdot M$. Nach Satz 139 ist C positiv definit, daher auch die zu C kongruente Matrix A.

§3. Linearformen

Definition 142 : Eine lineare Funktion von V nach K heißt *Linearform auf* V. Die Menge $\mathrm{Lin}_K(V,K)$ aller linearen Funktionen von V nach K bezeichnen wir kurz mit V^*.
V^* mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation heißt *Vektorraum der Linearformen auf V* oder *zu V dualer Vektorraum.*

Satz 143 : *Es seien* $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)$ *eine Basis von V und* $1 \le i \le n$. *Die Funktion*

$$X_i : V \longrightarrow K \quad , \; w \longmapsto \quad \textit{Koordinate von } w \textit{ bei } v_i \; ,$$

ist eine Linearform und heißt i-te Koordinatenfunktion bezüglich $\underline{v}$. *Für* $1 \le i,j \le n$ *ist* $X_i(v_j) = \delta_{ij}$.
Das n-Tupel $\underline{X} := (X_1,\dots,X_n)$ *ist eine Basis von* V^* *und heißt* die zu $\underline{v}$ duale Basis von V^*. *Für* $f \in V^*$ *ist*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)X_i \; .$$

Insbesondere haben V und V^* *dieselbe Dimension und sind daher isomorph.*

Beweis: Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Koordinatenfunktionen linear sind.
Aus $\sum_{i=1}^n c_iX_i = 0$ folgt für alle $j \in \{1,\dots,n\}$

$$0 = (\sum_{i=1}^{n} c_iX_i)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_iX_i(v_j) = c_j \; .$$

Daher ist $(X_1,\dots,X_n)$ linear unabhängig.
Sei $f \in V^*$, dann ist für alle $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(v_i)X_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)X_i(v_j) = f(v_j) \; ,$$

also $f = \sum_{i=1}^n f(v_i)X_i$.

Satz 144 : *Es seien V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt* $\langle -,- \rangle$, $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)$ *eine Basis von V und*
$\underline{X} := (X_1,\dots,X_n)$ *die dazu duale Basis von* V^*. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *ist die Funktion*

$$\langle v,- \rangle : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto \langle v,w \rangle \; ,$$

linear. Die Funktion

$$V \longrightarrow V^* \quad , \quad v \longmapsto \langle v, - \rangle \ ,$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Wenn $\underline{v}$ eine ON-Basis ist, dann ist $\langle v_i, - \rangle = X_i$, für $1 \leq i \leq n$.

Beweis: Übung.

Definition 145 : Es sei f eine beliebige Funktion von V nach K. Die Menge

$$\mathcal{N}(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

heißt *Nullstellenmenge von f*.

Satz 146 : *Es seien f eine Funktion von V nach K, W ein Vektorraum und h eine surjektive Funktion von W nach V. Dann ist*

$$h^{-1}\left(\mathcal{N}(f)\right) = \mathcal{N}(f \circ h) \ .$$

Beweis: Für $w \in W$ ist $(f \circ h)(w) = 0$ genau dann, wenn $h(w) \in \mathcal{N}(f)$.

Dieser Satz liefert eine Idee zur Beschreibung von Nullstellenmengen gewisser Funktionen f: Finde eine „einfache" surjektive Funktion h so, dass die Nullstellenmenge von $f \circ h$ „gut bekannt" ist. Dann kann $\mathcal{N}(f)$ als Bild von $\mathcal{N}(f \circ h)$ unter h beschrieben werden.

§4. Quadratische Formen

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 147 : Für Funktionen f und g von V nach K heißt die Funktion

$$f \cdot g : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto f(w) \cdot g(w) \ ,$$

das *punktweise Produkt* von f und g.
Oft wird statt $f \cdot g$ nur fg geschrieben und f^2 statt $f \cdot f$.

Satz 148 : *Die Menge $\mathcal{F}(V,K)$ ist mit der punktweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement*

$$\mathbf{1} : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto 1 \ .$$

Mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{F}(V,K)$ ein Vektorraum. Für $c \in K$ und $f, g \in \mathcal{F}(V,K)$ ist

$$c(f \cdot g) = (cf) \cdot g = f \cdot (cg) \ .$$

Beweis: Übung.

Definition 149: Eine Funktion $q : V \longrightarrow K$ heißt *quadratische Form* auf V, wenn sie Summe von Produkten von Linearformen auf V ist, dh. es gibt Linearformen $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m$ auf V so, dass

$$q = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot g_i$$

ist. Die Menge aller quadratischen Formen ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(V,K)$ und wird mit $Q(V)$ bezeichnet.

Satz 150:

(1) *Die Familie $(X_i \cdot X_j)_{1 \le i \le j \le n}$ ist eine K-Basis von $Q(V)$.*
Insbesondere ist

$$\dim_K(Q(V)) = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

(2) *Für $c \in K, w \in V$ und $q \in Q(V)$ ist*

$$q(cw) = c^2 q(w) \ .$$

Beweis:

(1) Es seien $f = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ und $g = \sum_{i=1}^n d_j X_j$. Nach Satz 148 ist dann

$$f \cdot g = \sum_{1 \le i,j \le n} c_i d_j X_i X_j = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i X_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (c_i d_j + c_j d_i) X_i X_j \ ,$$

also ist $(X_i \cdot X_j)_{1 \le i \le j \le n}$ ein Erzeugendensystem von $Q(V)$.
Wenn eine Linearkombination

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} X_i X_j = 0$$

ist, dann ist für alle k

$$0 = \left(\sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} X_i X_j \right) (v_k) = c_{kk}$$

und für alle k, l mit $k < l$

$$0 = \left(\sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} X_i X_j \right) (v_k + v_l) = c_{kl} \ ,$$

daher ist $(X_i \cdot X_j)_{1 \le i \le j \le n}$ auch linear unabhängig.

(2) Für $c \in K$, $w \in V$ und $f, g \in V^*$ ist

$$(f \cdot g)(cw) = f(cw) g(cw) = c^2 f(w) g(w) = c^2 (f \cdot g)(w) \ .$$

Satz 151 :

(1) *Ist $q : V \longrightarrow K$ eine quadratische Form, dann ist*

$$b_q : V \times V \longrightarrow K \quad , \quad (u,w) \longmapsto \frac{1}{2}\left[q(u+w) - q(u) - q(w)\right] \ ,$$

eine symmetrische Bilinearform und heißt die durch q definierte Bilinearform. *Für $w \in V$ ist dann*

$$q(w) = b_q(w,w) \ .$$

Die Matrix von q *bezüglich $\underline{v}$ (Schreibweise: $M(q,\underline{v})$) ist die Matrix von b_q bezüglich $\underline{v}$.*
Der Rang von q *bzw. die* Signatur von q *ist dann der Rang bzw. die Signatur dieser Matrix.*

(2) *Ist $b : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform auf V, dann ist*

$$q_b : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto b(w,w) \ ,$$

eine quadratische Form und heißt die durch b definierte quadratische Form.
Für $u,w \in V$ ist dann

$$b(u,w) = \frac{1}{2}(q_b(u+w) - q_b(u) - q_b(w)) \ .$$

Wenn $A \in K^{n \times n}$ die Matrix von b bezüglich $\underline{v}$ ist, dann ist

$$q_b = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 A_{ij} X_i X_j \ .$$

Für jede n-Spalte $y \in K^{n \times 1}$ ist

$$q_b(\underline{v} \cdot y) = y^\top \cdot A \cdot y \ .$$

(„Jeder quadratischen Form entspricht genau eine symmetrische Bilinearform und, nach Wahl einer Basis von V, genau eine symmetrische Matrix, und umgekehrt.“)

Beweis:

(1) Die Funktion b_q ist offensichtlich symmetrisch, also genügt es zu zeigen, dass für alle $c \in K$, $u, u', w \in V$

$$b_q(c(u+u'),w) = cb_q(u,w) + cb_q(u',w)$$

ist. Mit $q = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} X_i X_j$ kann das leicht nachgerechnet werden.

(2) Sei A die Matrix von b bezüglich $\underline{v}$. Für alle n-Spalten y ist dann

$$q_b(\underline{v} \cdot y) = b(\underline{v} \cdot y, \underline{v} \cdot y) = y^\top \cdot A \cdot y = \sum_{1 \le i \le j \le n} A_{ij} y_i y_j =$$

$$= \sum_{1 \le i \le j \le n} A_{ij} X_i(\underline{v} \cdot y) X_j(\underline{v} \cdot y) = (\sum_{1 \le i \le j \le n} A_{ij} X_i X_j)(\underline{v} \cdot y) \ .$$

Daher ist $q_b = \sum_{1 \le i \le j \le n} A_{ij} X_i X_j \in Q(V)$.

Beispiel 152 : Sei $K = \mathbb{R}$ und $\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Die durch $\langle -,- \rangle$ definierte quadratische Form ist

$$\|.\|^2 : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad w \longmapsto \langle w,w \rangle = \|w\|^2 \ ,$$

und ihre Matrix bezüglich $\underline{v}$ ist

$$\big(\langle v_i, v_j \rangle\big)_{1 \leq i,j \leq n} \ .$$

Satz 153 : *Es seien q eine quadratische Form auf V, A ihre Matrix bezüglich $\underline{v}$ und r der Rang von A. Seien $P \in GL_n(K)$ und $d_1, \ldots, d_r \in K$ so, dass*

$$P^\top \cdot A \cdot P = Diag(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$$

(siehe Satz 134).
Sei g die bijektive lineare Funktion von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{v}$ die Matrix P ist. Dann ist

$$q \circ g = d_1 X_1^2 + \ldots + d_r X_r^2 \ .$$

Beweis: Für alle n-Spalten $y \in K^{n \times 1}$ ist $(q \circ g)(\underline{v} \cdot y) =$

$$= q(g(\underline{v} \cdot y)) = q\left(\underline{v} \cdot (Py)\right) = (Py)^\top \cdot A \cdot (Py) = y^\top \cdot P^\top \cdot A \cdot P \cdot y =$$

$$= y^\top \cdot Diag(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0) \cdot y = \sum_{i=1}^{r} d_i y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} d_i X_i^2 \right) (\underline{v} \cdot y) \ .$$

§5. Quadratische Funktionen

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 154 : Es seien $c \in K$, $\ell \in V^*$, $q \in Q(V)$ und $q \neq 0$.
Dann ist die Funktion $f := q + \ell + c \cdot \mathbf{1}$ von V nach K eine *quadratische Funktion auf* V. Oft wird statt $c \cdot \mathbf{1}$ nur c geschrieben.
Die Funktionen q bzw. ℓ bzw. c heißen *quadratischer* bzw. *linearer* bzw. *konstanter Anteil* von f.
Die Nullstellenmenge einer quadratischen Funktion auf V heißt *Quadrik in* V.

Beispiel 155 : Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis, $u \in V$ und r eine positive reelle Zahl. Der Kreis um u mit Radius r ist eine Quadrik, denn

$$\{w \in V \mid \|w - u\| = r\} = \{w \in V \mid \langle w-u, w-u \rangle = r^2\} =$$

$$= \{w \in V \mid X_1^2(w-u) + X_2^2(w-u) = r^2\} =$$

$$= \mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 2X_1(u)X_1 - 2X_2(u)X_2 + X_1(u)^2 + X_2(u)^2 - r^2) \ .$$

Satz 156 : *Der quadratische bzw. lineare bzw. konstante Anteil einer quadratischen Funktion ist durch diese eindeutig bestimmt.*

Beweis: Seien $q, q' \in Q(V)$, $\ell, \ell' \in V^*$ und $c, c' \in K$ so, dass $q + \ell + c = q' + \ell' + c'$. Dann ist

$$c = (q + \ell + c)(0) = (q' + \ell' + c')(0) = c' \ ,$$

also $c = c'$ und

$$q + \ell = q' + \ell' \ .$$

Für alle $w \in V$ ist

$$2^2 q(w) + 2\ell(w) = (q + \ell)(2w) = (q' + \ell')(2w) = 2^2 q'(w) + 2\ell'(w) \ .$$

Wegen $2 = 1 + 1 \neq 0$ ist daher

$$2q + \ell = 2q' + \ell' \ .$$

Somit ist $\ell = \ell'$ und $q = q'$.

Satz 157 : *(Affine Normalformen quadratischer Funktionen)*
Es seien f eine quadratische Funktion auf V, q ihr quadratischer Anteil und r der Rang von q. Dann gibt es eine bijektive affine Abbildung $h : V \longrightarrow V$ und $d_0 \in K$, $d_1, \ldots, d_r \in K \setminus \{0\}$ so, dass $f \circ h$ eine der folgenden quadratischen Funktionen ist:

$$d_1 X_1^2 + \ldots + d_r X_r^2 + d_0 \ ,$$

$$d_1 X_1^2 + \ldots + d_r X_r^2 - 2X_n \quad (\textit{nur wenn } r < n).$$

Wenn $K = \mathbb{C}$ ist, kann $d_1 = \ldots = d_r = 1$ gewählt werden.
Wenn $K = \mathbb{R}$ und $(s, r-s)$ die Signatur von q ist, kann
$d_1 = \ldots = d_s = 1$ und $d_{s+1} = \ldots = d_r = -1$ gewählt werden.
Diese quadratischen Funktionen heißen quadratische Funktionen in affiner Normalform bezüglich $\underline{v}$.

Beweis: Die Funktion h kann wie folgt berechnet werden:
Wähle $g \in GL_K(V)$ so, dass

$$q \circ g = d_1 X_1^2 + \ldots + d_r X_r^2$$

(siehe Satz 153).
Es seien $\ell = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ der lineare und c der konstante Anteil von $f \circ g$. Mit $u := \sum_{i=1}^r (-\frac{1}{2} a_i d_i^{-1}) v_i$ ist

$$f \circ g \circ t_u = \sum_{i=1}^r d_i (X_i - \frac{1}{2} a_i d_i^{-1})^2 + \sum_{i=1}^r a_i (X_i - \frac{1}{2} a_i d_i^{-1}) + \sum_{i=r+1}^n a_i X_i + c =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} d_i X_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i + (c - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{4} a_i^2 d_i^{-1}) \ .$$

Falls $\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i = 0$ ist, dann ist $h := g \circ t_u$ die gesuchte Funktion.
Falls $\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i \neq 0$ ist, dann ist $r < n$ und wir können $g' \in GL_K(V)$ so wählen, dass

$$X_1 \circ g' = X_1, \ldots, X_r \circ g' = X_r \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=r+1}^{n} a_i X_i \right) \circ g' = -2X_n \ .$$

Dann ist

$$f \circ g \circ t_u \circ g' = \sum_{i=1}^{r} d_i X_i^2 - 2X_n + c' \ ,$$

wobei $c' := c - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{4} a_i^2 d_i^{-1}$.
Sei $u' := -\frac{1}{2} c' v_n$, dann ist

$$f \circ g \circ t_u \circ g' \circ t_{u'} = \sum_{i=1}^{r} d_i X_i^2 - 2X_n$$

und $h := g \circ t_u \circ g' \circ t_{u'}$.

Beispiel 158: Es seien $n = 2$, $K = \mathbb{Q}$ und

$$f := X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 + 2X_1 + 3X_2 + 4 \ .$$

Es sei $g : V \longrightarrow V$ die durch $g(v_1) = v_1$ und $g(v_2) = -v_1 + v_2$ definierte lineare Funktion. Dann ist

$$f \circ g = X_1^2 + 2X_1 + X_2 + 4$$

und

$$f \circ g \circ t_{-v_1} = X_1^2 + X_2 + 3 \ .$$

Es sei $g' : V \longrightarrow V$ die durch $g'(v_1) = v_1$ und $g'(v_2) = -2v_2$ definierte lineare Funktion. Dann ist

$$f \circ g \circ t_{-v_1} \circ g' = X_1^2 - 2X_2 + 3$$

und

$$f \circ g \circ t_{-v_1} \circ g' \circ t_{\frac{3}{2} v_2} = X_1^2 - 2X_2 \ .$$

Sei $h := g \circ t_{-v_1} \circ g' \circ t_{\frac{3}{2} v_2}$. Dann ist

$$h(y_1 v_1 + y_2 v_2) = (y_1 + 2y_2 + 2) v_1 - (2y_2 + 3) v_2$$

und $h(\mathcal{N}(X_1^2 - 2X_2)) = \mathcal{N}(f)$. Daher ist

$$\mathcal{N}(f) = \{ (y_1 + y_1^2 + 2) v_1 - (y_1^2 + 3) v_2 \mid y_1 \in \mathbb{Q} \} \ .$$

Für $y_1 = 0$ bzw. 1 bzw. -1 erhalten wir $2v_1 - 3v_2$ bzw. $4v_1 - 4v_2$ bzw. $2v_1 - 4v_2 \in \mathcal{N}(f)$.

Beispiel 159 : Es seien $n = 1$, $a,b \in K$ und

$$f := X_1^2 + aX_1 + b \ .$$

Dann ist

$$f \circ t_{-\frac{a}{2}} = X_1^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

und

$$\mathcal{N}(f) = t_{-\frac{a}{2}}\left(\mathcal{N}(X_1^2 - (\frac{a^2}{4} - b))\right) \ .$$

Daher ist $\mathcal{N}(f)$ genau dann nicht leer, wenn es in K ein Element y gibt mit

$$y^2 = \frac{a^2}{4} - b \ .$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist das genau dann der Fall, wenn $\frac{a^2}{4} - b \geq 0$.
Wenn ein solches $y \in K$ existiert, ist $\mathcal{N}(f \circ t_{-\frac{a}{2}}) = \{y, -y\}$ und

$$\mathcal{N}(f) = \{-\frac{a}{2} + y, -\frac{a}{2} - y\} \ .$$

§6. Quadriken

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Hilfssatz 160 : *Es sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.*

(1) *Die Zusammensetzung $f \circ h$ einer quadratischen Funktion f auf V mit einer surjektiven affinen Funktion $h : W \longrightarrow V$ ist eine quadratische Funktion auf W.*
(2) *Das Urbild $h^{-1}(Q)$ einer Quadrik Q in V unter einer surjektiven affinen Funktion $h : W \longrightarrow V$ ist eine Quadrik.*
(3) *Das Bild $h(Q)$ einer Quadrik Q unter einer bijektiven affinen Funktion $h : W \longrightarrow V$ ist eine Quadrik.*
(4) *Für eine quadratische Funktion f auf V und $c \in K \setminus \{0\}$ ist $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(cf)$.*

Beweis:

(1) Es sei q der quadratische Anteil von f. Weil $q \neq 0$ und weil h surjektiv ist, ist auch $q \circ h \neq 0$ und $f \circ h \neq 0$. Es genügt also zu zeigen, dass $q \circ h$ eine quadratische Funktion ist. Wenn g_1, g_2 Linearformen auf V sind, dann ist $(g_1 g_2) \circ h = (g_1 \circ h)(g_2 \circ h)$. Die Funktionen $g_1 \circ h$ und $g_2 \circ h$ sind affin, also ist $(g_1 \circ h)(g_2 \circ h)$ eine quadratische Funktion. Weil q eine Linearkombination von Produkten von Linearformen ist, folgt daraus die Behauptung.
(2) Es sei f eine quadratische Funktion mit $\mathcal{N}(f) = Q$. Dann ist $h^{-1}(Q) = \mathcal{N}(f \circ h)$, also folgt die Behauptung aus (1).
(3) Folgt aus (2).

(4) Wegen $c \neq 0$ ist $f(v) = 0$ genau dann, wenn $cf(v) = 0$.

Definition 161 : Zwei Teilmengen M und N von V heißen *affin kongruent*, wenn es eine bijektive affine Funktion $h : V \longrightarrow V$ gibt, sodass $h(M) = N$ ist.
Zwei Teilmengen M und N eines euklidischen Raumes V heißen *euklidisch kongruent*, wenn es eine Isometrie $h : V \longrightarrow V$ gibt, sodass $h(M) = N$ ist.

Beispiel 162 : Je zwei Dreiecke in V sind affin kongruent.
Zwei Dreiecke in einem euklidischen Raum sind genau dann euklidisch kongruent, wenn die zwei Tripel der Seitenlängen der Dreiecke bis auf die Reihenfolge gleich sind.

Satz 163 : *(Affine Normalformen von Quadriken)*
Es seien $K = \mathbb{R}$, f eine quadratische Funktion auf V, r der Rang und $(s, r-s)$ die Signatur des quadratischen Anteils von f. Die Quadrik $\mathcal{N}(f)$ ist zu einer der folgenden Quadriken affin kongruent:

$$\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2)\ ,$$
$$\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 + 1)\ ,$$
$$\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 1)\ ,$$
$$\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 2X_n)\ (\textit{nur wenn } r < n).$$

Beweis: Folgt aus Satz 157 und Lemma 160,(4).

Beispiel 164 : Es seien d eine negative reelle Zahl und $h := \frac{\sqrt{|d|}}{|d|} \cdot \mathrm{Id}_V$. Dann ist

$$h\big(\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 + d)\big) =$$
$$= \mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 1)\ .$$

§7. Quadriken in der Ebene

Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 165 : Es seien $u, w \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\|u - w\| < 2r$ ist. Dann heißt die Menge

$$E(u, w, r) := \{z \in V \mid \|z - u\| + \|z - w\| = 2r\}$$

Ellipse mit den *Brennpunkten* u und w.

Fixiert man die Enden eines Fadens der Länge $2r$ in den Punkten u und w und durchläuft man dann mit einem Bleistift alle Punkte so, dass der Faden gespannt ist, dann erhält man die Ellipse $E(u,w,r)$ („Gärtner-Ellipse“ oder „Fadenkonstruktion“ der Ellipse).

Beispiel 166 : $E(u,u,r)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt u und Radius r.

Satz 167 : *Es seien $u,w \in V$, $c := \|\frac{u-w}{2}\|$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > c$.*

(1) *Die Ellipse $E(u,w,r)$ ist euklidisch kongruent zu $E(cv_1,-cv_1,r)$. Eine Ellipse $E(u',w',r')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $E(u,w,r)$, wenn $r = r'$ und $\|u-w\| = \|u'-w'\|$ ist.*

(2)
$$E(cv_1,-cv_1,r) = \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2 + \frac{1}{(r^2-c^2)}X_2^2 - 1)\ .$$

(3) *Die Ellipse $E(u,w,r)$ ist affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2+X_2^2-1)$. Insbesondere ist jede Ellipse eine Quadrik und je zwei Ellipsen sind zueinander affin kongruent.*

Beweis:

(1) Ist f eine Isometrie, dann ist $f(E(u,w,r)) = E(f(u),f(w),r)$. Daher ist
$$t_{-\frac{u+w}{2}}(E(u,w,r)) = E(\frac{u-w}{2},-\frac{u-w}{2},r)\ .$$
Es sei h die Drehung um 0, die den Punkt $\frac{u-w}{2}$ auf den Punkt cv_1 abbildet. Dann ist
$$(h \circ t_{-\frac{u+w}{2}})(E(u,w,r)) = E(cv_1,-cv_1,r)\ ,$$
insbesondere ist $E(u,w,r)$ euklidisch kongruent zu $E(cv_1,-cv_1,r)$.

(2) Für $z \in V$ ist $z \in E(cv_1,-cv_1,r)$ genau dann, wenn
$$\|z-cv_1\| + \|z+cv_1\| = 2r\ .$$
Man rechnet leicht nach, dass dies genau dann der Fall ist, wenn
$$(r^2-c^2)X_1^2(z) + r^2X_2^2(z) - r^2(r^2-c^2) = 0$$
ist. Wegen $0 \leq c < r$ und $r^2 > 0$ ist $r^2-c^2 > 0$ und $r^2(r^2-c^2) > 0$. Daher ist
$$E(cv_1,-cv_1,r) = \mathcal{N}((r^2-c^2)X_1^2 + r^2X_2^2 - r^2(r^2-c^2)) =$$
$$= \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2 + \frac{1}{r^2-c^2}X_2^2 - 1)\ .$$

(3) Es sei $g : V \longrightarrow V$ die lineare Funktion mit $g(v_1) = \frac{1}{r}v_1$ und $g(v_2) = \frac{1}{\sqrt{r^2-c^2}}v_2$.
Dann ist

$$(g \circ h \circ t_{-\frac{u+w}{2}})(E(u,w,r)) = g(E(cv_1, -cv_1, r)) =$$

$$= \mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 1) ,$$

somit ist $E(u,w,r)$ affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 1)$.

Definition 168 : Es seien $u, w \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $0 < 2r < \|u - w\|$ ist. Dann heißt die Menge

$$H(u,w,r) := \{z \in V \mid 2r = |\,\|z-u\| - \|z-w\|\,|\}$$

Hyperbel mit den *Brennpunkten u* und *w*.

Satz 169 : *Es seien $u, w \in V$, $c := \|\frac{u-w}{2}\|$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < c$.*

(1) *Die Hyperbel $H(u,w,r)$ ist euklidisch kongruent zu $H(cv_1, -cv_1, r)$. Eine Hyperbel $H(u', w', r')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $H(u,w,r)$, wenn $r = r'$ und $\|u - w\| = \|u' - w'\|$ sind.*

(2)
$$H(cv_1, -cv_1, r) = \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2 - \frac{1}{(c^2 - r^2)}X_2^2 - 1) .$$

(3) *Die Hyperbel $H(u,w,r)$ ist affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2 - X_2^2 - 1)$. Insbesondere ist jede Hyperbel eine Quadrik und je zwei Hyperbeln sind zueinander affin kongruent.*

Beweis: Übung (analog dem Beweis von Satz 167).

Definition 170 : Es seien $u \in V$ und G eine Gerade in V, die nicht u enthält. Dann heißt die Menge $P(u,G)$ aller Punkte $z \in V$, die zu u und zu G den gleichen Abstand haben, *Parabel* mit *Brennpunkt u* und *Leitlinie G*.

Satz 171 : *Es seien $u \in V$, G eine Gerade in V, die nicht u enthält, und c der Abstand des Punktes u von der Geraden G.*

(1) *Die Parabel $P(u,G)$ ist zu $P(\frac{c}{2}v_2, -\frac{c}{2}v_2 + \mathbb{R}v_1)$ euklidisch kongruent. Eine Parabel $P(u', G')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $P(u,G)$, wenn die Abstände von u' zu G' und von u zu G gleich sind.*

(2)
$$P(\frac{c}{2}v_2, -\frac{c}{2}v_2 + \mathbb{R}v_1) = \mathcal{N}(\frac{1}{c}X_1^2 - 2X_2) .$$

(3) *Die Parabel* $P(u,G)$ *ist affin kongruent zu* $\mathcal{N}(X_1^2 - 2X_2)$. *Insbesondere ist jede Parabel eine Quadrik und je zwei Parabeln sind zueinander affin kongruent.*

Beweis: Übung (analog dem Beweis von Satz 167).

Satz 172:

(1) *Jede Quadrik in* V *ist euklidisch kongruent zu einer der folgenden Quadriken:*

Quadrik	*geometrische Beschreibung*
$\mathcal{N}(X_1^2)$	*eine Gerade*
$\mathcal{N}(X_1^2 - \frac{1}{b^2}X_2^2),\ b > 0$	*zwei einander schneidende Geraden*
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2)$	*ein Punkt*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - 1),\ a > 0$	*zwei parallele Geraden mit Abstand* $2a$
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + 1)$	*die leere Menge*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 + \frac{1}{b^2}X_2^2 - 1)$, $0 < b \leq a$	*eine Ellipse mit Achsenabschnitten a und b*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - \frac{1}{b^2}X_2^2 - 1)$, $a > 0, b > 0$	*eine Hyperbel mit Achsenabschnitten a und b*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - 2X_2),\ a > 0$	*eine Parabel mit Parameter* a^2

(2) *Jede Quadrik ist affin kongruent zu einer der Quadriken in* (1) *mit* $a = b = 1$.

Beweis:

(1) Beweis wird weggelassen.
(2) Folgt aus Satz 163.

Satz 173:

(1) *Es seien Q eine Ellipse in V mit Brennpunkten u und w. Dann gibt es für jeden Punkt $z \in Q$ genau eine Gerade T_z in V, deren Durchschnitt mit Q gleich $\{z\}$ ist. Diese Gerade heißt* Tangente *an Q im Punkt z. Die Winkel zwischen der Tangente T_z und der Geraden durch z und u sowie der Geraden durch z und w sind gleich.*
(2) *Es sei Q eine Parabel in V mit Brennpunkt u und Leitlinie L. Dann gibt es für jeden Punkt $z \in Q$ genau eine Gerade T_z in V, die nicht senkrecht zur Leitlinie von Q steht und deren Durchschnitt mit Q gleich $\{z\}$ ist. Diese Gerade heißt* Tangente *an Q im Punkt z. Die Winkel zwischen der Tangente T_z und der Geraden durch z und u sowie der zu L senkrecht stehenden Geraden durch z sind gleich.*

Beweis:

(1) Sei $f : V \longrightarrow V$ eine bijektive affine Funktion. Wenn G eine Gerade in V ist, deren Durchschnitt mit $f(Q)$ gleich $\{f(z)\}$ ist, dann ist der Durchschnitt von $f^{-1}(Q)$ mit Q gleich $\{z\}$. Nach Satz 167 genügt es daher, die Aussage für

$$Q = \mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 1)$$

zu beweisen. In diesem Fall kann leicht nachgeprüft werden, dass die Gerade

$$T_z := \mathcal{N}(X_1(z)X_1 + X_2(z)X_2 - 1)$$

die angegebenen Eigenschaften hat.

Nach Satz 167 können wir annehmen, dass

$$Q = E(cv_1, -cv_1, r)$$

ist, wobei $r > c > 0$ ist. Sei

$$y := \frac{1}{(r^2 - c^2)} z_2 v_1 - \frac{1}{r^2} z_1 v_2 \ .$$

Dann ist $z + \mathbb{R}y$ die Tangente an Q im Punkt z. Seien α bzw. β die Winkel zwischen T_z und der Geraden durch z und cv_1 bzw. $-cv_1$. Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle z - cv_1, y\rangle}{\|z - cv_1\| \cdot \|y\|} \text{ und } \cos(\beta) = \frac{\langle z + cv_1, y\rangle}{\|z + cv_1\| \cdot \| - y\|} \ .$$

Da α und β im Intervall $[0,\pi]$ liegen, genügt es nachzurechnen, dass $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ ist. Mit $z_2^2 = \frac{1}{(r^2-c^2)}(r^2 - z_1^2)$ erhält man

$$\|z \pm cv_1\| = \sqrt{(z_1 \pm c)^2 + z_2^2} = \frac{r^2 \pm cz_1}{r} \ .$$

Weiters ist

$$\langle z - cv_1, y\rangle = \frac{cz_2}{r^2(r^2 - c^2)}(cz_1 - r^2)$$

und

$$\langle z + cv_1, -y\rangle = \frac{-cz_2}{r^2(r^2 - c^2)}(cz_1 + r^2) \ ,$$

daraus folgt $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.

(2) Übung.

Aus diesem Satz folgt: Ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt einer Ellipse ausgeht und an der Ellipse reflektiert wird, geht durch den anderen Brennpunkt. Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt einer Parabel ausgehen und an der Parabel reflektiert werden, sind dann zueinander parallel.