# Proseminar
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
# für Lehramtsstudierende
# Sommersemester 2013

## 15. und 16. Mai 2013

19) Was ist eine *orthogonale Funktion*? Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt $< a+bi, c+di >:= ac+bd$ (für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Es seien $x \in \mathbb{R}$, $z := \cos(x) + i\sin(x)$ und

$$m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, a \longmapsto z \cdot a\,,$$

die Multiplikation mit $z$. Zeigen Sie, dass $m$ eine orthogonale Funktion ist. Berechnen Sie den Winkel zwischen $4 + 3i$ und $m(4 + 3i)$.

20) Was ist eine *Isometrie* eines euklidischen Raums? Welche Beziehung besteht zwischen Isometrien und orthogonalen Funktionen? Welche der zwei Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x+2y+2z+5, -2x-y+2z-1, 2x-2y+z-3)$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x+2y-2z+4, -2x+y-2z-7, 2x-2y+z+1)$$

ist eine Isometrie?
Berechnen Sie ihren linearen Anteil und ihren Translationsanteil.

21) Wie verändert sich die Matrix einer linearen Funktion, wenn anstatt der Basen $\underline{v}$ im Definitionsbereich und $\underline{w}$ im Bildbereich die Basen $\underline{v}S$ und $\underline{w}T$ ($S, T$ invertierbar) gewählt werden?
Es seien $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(a, b) \longmapsto (-b, a)$, $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\underline{v} := \underline{e}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $d$ linear und bijektiv ist und dass $\underline{v}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie den Graphen von $d$ durch einige Pfeile in der Ebene. Berechnen Sie die Matrizen $M(d, \underline{e})$ und $M(d, \underline{v})$ von $d$.