Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
für Lehramtsstudierende
Sommersemester 2014

19. Mai 2014

25) Was ist eine *Schraubung*, was ist eine *Drehspiegelung*? Die folgenden Funktionen f, g von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) nach $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} -\frac{3\,x}{13} + \frac{4\,y}{13} - \frac{12\,z}{13} \\ \frac{12\,x}{13} - \frac{3\,y}{13} - \frac{4\,z}{13} \\ \frac{4\,x}{13} + \frac{12\,y}{13} + \frac{3\,z}{13} \end{bmatrix}$$

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} + 2 \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} - 1 \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} + 2 \end{bmatrix}$$

26) Die folgenden Funktionen h, k von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) nach $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{x}{9} - \frac{4\,y}{9} + \frac{8\,z}{9} - 1 \\ -\frac{4\,x}{9} + \frac{7\,y}{9} + \frac{4\,z}{9} - 1 \\ \frac{8\,x}{9} + \frac{4\,y}{9} + \frac{z}{9} + 3 \end{bmatrix}$$

$$k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} \end{bmatrix}$$

27) Es sei

$$M := \{(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1)\}.$$

Berechnen Sie die Symmetriegruppe von M in $\mathbb{R}^3$, also alle Isometrien f von $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt und der Orientierung durch die Standardbasis) mit der Eigenschaft $f(M) = M$.

Zeigen Sie zuerst, dass alle Elemente dieser Symmetriegruppe lineare Funktionen sind. Stellen Sie diese dann sowohl durch Drehachse und Drehwinkel oder durch die Spiegelungsebene, als auch durch ihre Matrizen bezüglich der Standardbasis dar.