Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
für Lehramtsstudierende
Sommersemester 2014

2. Juni 2014

31) Wann ist eine reelle symmetrische Matrix *positiv definit*? Wie überprüft man, ob eine reelle symmetrische Matrix positiv definit ist? Wie überprüft man, ob eine reelle Bilinearform ein Skalarprodukt ist?
Es seien V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum, $\underline{v}$ eine Basis von V und b_1, b_2, b_3 die Bilinearformen auf V, deren Matrizen bezüglich $\underline{v}$ gleich

$$\begin{pmatrix} 873,204 & 234,356 & 955,778 \\ 234,356 & 975,991 & -128,765 \\ 955,778 & -128,765 & -735,237 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

sind.
Überprüfen Sie, welche der drei Bilinearformen ein Skalarprodukt ist und berechnen Sie durch Kongruenzumformungen ihrer Matrix eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes von V.

32) Es seien a, b, c reelle Zahlen und

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \longmapsto 1 + ax^2 + 2bxy + cy^2\,.$$

Zeigen Sie: Für alle Zahlenpaare (x, y) ist

$$f(x, y) = 1 + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Folgern Sie daraus: Wenn $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ ist, dann ist $1 = f(0, 0)$ der kleinste Funktionswert von f. Wenn $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$ ist, dann ist $1 = f(0, 0)$ der größte Funktionswert von f.
Hinweis: Was bedeutet $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}?$$

33) Es sei f eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a. Der Graph der Funktion f ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \longmapsto y - f(x)\,.$$

b. Sind r, s reelle Zahlen und t die Verschiebung mit $t(0, 0) = (r, s)$, dann ist der Graph der Funktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto s + f(x - r)$$

das Bild des Graphen von f unter der Verschiebung t.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 105.

c. Skizzieren Sie den Graphen von

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto 2 + (x - 3)^2\,.$$

Verwenden Sie dazu b. und skizzieren sie zuerst den Graphen von

$$q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto x^2\,.$$

d. Beschreiben Sie, wie man für reelle Zahlen m und n den Graphen von

$$\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto f(m \cdot x + n)$$

zeichnet, wenn man den von f schon gezeichnet hat.

e. Skizzieren Sie den Graphen von

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto 1 + (3x + 1)^2\,.$$

Verwenden Sie dazu d.