Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
für Lehramtsstudierende
Sommersemester 2012

Lösung von Aufgabe 14

Es seien O, P, Q drei Punkte und p, q zwei Skalare mit $p+q \neq 0$. Es ist zu beweisen, dass der Punkt $M = O + \frac{1}{p+q}(p\vec{OP} + q\vec{OQ})$ unabhängig von der Wahl des Punktes O erhalten wird.

Für zwei Punkte A und B bezeichnet $\vec{AB}$ die Translation, die dem Punkt A den Punkt B zuordnet.
In $M = O + \frac{1}{p+q}(p\vec{OP} + q\vec{OQ})$ bedeutet das zweite $+$ die Hintereinanderausführung von Funktionen (die Addition im Vektorraum aller Translationen der Ebene). Das erste $+$ bedeutet, dass die Translation in O ausgewertet wird, also

$$M = (\frac{1}{p+q}(p\vec{OP} + q\vec{OQ}))(O).$$

Wir zeigen, dass für jeden Punkt A der Ebene gilt:

$$M = (\frac{1}{p+q}(p\vec{AP} + q\vec{AQ}))(A).$$

Dazu betrachten wir die Translation $\vec{OA}$. Es ist

$$A = (\vec{OA})(O) \quad \text{und} \quad \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

und daher

$$(\frac{1}{p+q}(p\vec{AP} + q\vec{AQ}))(A) = (\frac{1}{p+q}(p\vec{AP} + q\vec{AQ}))(\vec{OA}(O)) =$$

$$= (\frac{1}{p+q}(p\vec{AP}+q\vec{AQ})+\vec{OA})(O) = (\frac{1}{p+q}(p\vec{AP}+q\vec{AQ}+(p+q)\vec{OA}))(O) =$$

$$= (\frac{1}{p+q}(p\vec{OA} + p\vec{AP} + q\vec{OA} + q\vec{AQ}))(O) =$$

$$= (\frac{1}{p+q}(p\vec{OP} + q\vec{OQ}))(O) = M.$$