Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
für Lehramtsstudierende
Sommersemester 2012

21. März 2012

7) Wann sind zwei Matrizen *äquivalent*? Wie überprüft man, ob zwei Matrizen *äquivalent* sind?
Sind die Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & 24 \\ 5 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$
äquivalent? Sei
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
und r der Rang von A. Berechnen Sie invertierbare Matrizen P und Q so, dass PAQ eine Matrix ist, deren Einträge mit Indizes $(1,1), (2,2), \ldots, (r,r)$ gleich 1 und für alle anderen Indizes gleich 0 sind.

8) Wann sind zwei Matrizen *ähnlich*?
Geben Sie zwei reelle 2×2-Matrizen an, die zueinander äquivalent, aber nicht ähnlich sind.
Geben Sie zwei von der Nullmatrix verschiedene reelle 2×2-Matrizen mit gleicher Determinante und gleicher Spur an, die nicht ähnlich sind.

9) Was ist die *Spur* und was ist die *Determinante* einer linearen Funktion (deren Definitions- und Bildbereich gleich sind), wie kann man sie berechnen? Was ist der *Kern*, was ist das *Bild* einer linearen Funktion?
Es sei V der Untervektorraum
$$\{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \mid c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$
des Vektorraums $\mathbb{R}[x]$ aller reellen Polynome.
Zeigen Sie, dass die Funktionen
$$f : V \to V\,,\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \mapsto c_0 + 2c_1x + 3c_2x^2 + 4c_3x^3\,,$$
(„mit x multiplizieren und dann differenzieren“) und
$$g : V \to V\,,\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \mapsto c_1x + 2c_2x^2 + 3c_3x^3\,,$$
(„differenzieren und dann mit x multiplizieren “) linear sind.
Berechnen Sie den Kern, das Bild, die Spur und die Determinante von f und von g.