Proseminar
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
für Lehramtsstudierende
Sommersemester 2012

7. März 2012

1) Was ist eine *lineare Funktion*? Zeigen Sie: Die Menge aller linearen Funktionen von einem reellen Vektorraum V nach $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen von V nach $\mathbb{R}$. Welche Dimension hat dieser Untervektorraum, wenn V ein- bzw. zwei- bzw. dreidimensional ist?
Können Sie in diesem Zusammenhang interpretieren, was „der Term 3x+4y-z“ bedeuten könnte? Was bedeutet x, wenn $V = \mathbb{R}$ ist, was bedeuten x und y, wenn $V = \mathbb{R}^2$ ist?

2) Es seien V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller linearen Funktionen von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}$ und

$$f : V \longrightarrow \mathbb{Q}^2\,,\ g \longmapsto (g((-1,1)), g((1,1))$$

(„Auswerten von linearen Funktionen in $(-1,1)$ und $(1,1)$“). Es sei p_i die durch $p_i((a_1,a_2)) := a_i$ definierte lineare Funktion von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}$, $i = 1,2$.
Zeigen Sie, dass f linear und bijektiv ist. Zeigen Sie, dass (p_1,p_2) eine Basis von V ist.

3) Wie ist die *Matrix einer linearen Funktion* definiert? Es seien

$$\underline{v} := (v_1,v_2) := ((1,2,-1),(0,2,1)) \in (\mathbb{R}^3)^2\,,$$
$$\underline{w} := (w_1,w_2) := ((2,0,-1),(1,1,2)) \in (\mathbb{R}^3)^2\,,$$

V bzw. W die von $\underline{v}$ bzw. $\underline{w}$ erzeugten Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ und $f : V \longrightarrow W$ die lineare Abbildung mit
$f(v_1) = 2w_1 - w_2$ und $f(v_2) = w_1 + w_2$. Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Berechnen Sie die Koordinaten von $f(2v_1 - 5v_2)$ bezüglich der Basis $\underline{w}$ von W. Ist f ein Isomorphismus?