```
> with(LinearAlgebra):
```

Aufgabe 26: Eine ON-Basis von **R**^3, bezüglich der die Matrix von s_U Diagonalgestalt hat, muss eine ON-Basis aus Eigenvektoren von s_U sein. Wir wählen die ersten zwei Basisvektoren in der Spiegelungsebene U (Eigenraum von s_U zum Eigenwert 1) und den dritten in der darauf normal stehenden Geraden (Eigenraum von s_U zum Eigenwert -1). Der Vektorraum U wird von den zwei Tripeln (1,1,0) und (-1,1,1) erzeugt. Deren Skalarprodukt ist 0, ihre Norm ist aber nicht 1. Daher ist zum Beispiel (sqrt(2)/2 (1,1,0), sqrt(3)/3(-1,1,1), sqrt(6)/6(1,-1,2)) eine ON-Basis mit der gesuchten Eigenschaft. Den zu den ersten zwei Basisvektoren normal stehenden dritten Basisvektor erhält man entweder durch Lösen eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten oder durch Berechnen des Kreuzproduktes der ersten zwei.

Das Bild von (1,2,3) unter der Spiegelung um den zu U parallelen affinen Unterraum, der den Punkt (1,1,1) enthält, ist
(1,1,1) + s_U ((1,2,3)-(1,1,1)), also (1,1,1)+s_U(0,1,2).
s_U (0,1,2) kann auf drei Arten berechnet werden:

- entweder indem (0,1,2) als Linearkombination der (ON-)Basisvektoren v1:=sqrt(2)/2 (1,1,0), v2:=sqrt(3)/3(-1,1,1), v3:=sqrt(6)/6(1,-1,2) geschrieben wird:
(0,1,2) = sqrt(2)/2 .v1+ sqrt(3).v2 +sqrt(6)/2.v3,
dann ist s_U(0,1,2) = sqrt(2)/2 .v1+ sqrt(3).v2 - sqrt(6)/2.v3.
Zur Erinnerung: die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer ON-Basis werden berechnet, indem man die Skalarprodukte dieses Vektors mit den Basisvektoren bildet.

```
> v1:=sqrt(2)/2*<1,1,0>; v2:=sqrt(3)/3*<-1,1,1>;
  v3:=sqrt(6)/6*<1,-1,2>;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

```
> c1:=DotProduct(<0,1,2>,v1); c2:=DotProduct(<0,1,2>,v2);
  c3:=DotProduct(<0,1,2>,v3);
```

$$c1 := \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c2 := \sqrt{3}$$

$$c3 := \frac{\sqrt{6}}{2}$$

```
> s_U(0,1,2):= c1 *v1+ c2*v2 - c3*v3;
```

$$\text{s\_U}(0, 1, 2) := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Bild_von_(1,2,3):=<1,1,1>+s_U(0,1,2);
```

$$\text{Bild\_von\_}(1, 2, 3) := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- oder man berechnet dieses Tripel mit Satz 80: s_U = 2.p_U - Id, dabei ist p_U die orthogonale Projektion
von **R**^3 auf U und Id die identische Funktion von **R**^3 nach **R**^3.
Also: s_U(0,1,2) = 2.p_U(0,1,2) - (0,1,2) =
2.DotProduct((0,1,2),v1).v1+2.DotProduct((0,1,2),v2).v2 - (0,1,2).

```
> s_U(0,1,2):=2*DotProduct(<0,1,2>,v1)*v1+2*DotProduct(<0,1,2>,v2)
  *v2 - <0,1,2>;
```

$$\text{s\_U}(0, 1, 2) := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Bild_von_(1,2,3):=<1,1,1>+s_U(0,1,2);
```

$$\text{Bild\_von\_}(1,2,3) := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- oder man berechnet die Matrix A von s_U bezüglich der Standardbasis und erhält s_U(0,1,2) als Produkt dieser Matrix mit der Spalte <1,2,3>. Dazu muss zuerst die Transformationsmatrix T von der Standardbasis zur Basis (v1,v2,v3) angeschrieben werden.

```
> T:= Matrix(3,3,[sqrt(2)/2, - sqrt(3)/3,sqrt(6)/6, sqrt(2)/2, sqrt(3)/3, -sqrt(6)/6, 0, sqrt(3)/3, 2*sqrt(6)/6]);
```

$$T := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

```
> T.Transpose(T);
```
(zur Kontrolle)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=T.DiagonalMatrix([1,1,-1]).T^(-1);
```
(Matrix von s_U bezüglich Standardbasis)

$$A := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> s_U(0,1,2):=A.<0,1,2>;
```

$$\text{s\_U}(0,1,2) := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> Bild_von_(1,2,3):=<1,1,1>+s_U(0,1,2);
```

$$\text{Bild\_von\_}(1,2,3) := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 27: Eine Gleitspiegelung im **R**^2 ist die Hintereinanderausführung einer Spiegelung und einer Translation
parallel zur Spiegelungsgerade. Wir bezeichnen die Gerade durch (0,0) und (2,-1) mit U und die Spiegelung um U mit s_U.
Es ist t(1,0) = (1,0)+ (2,2) = (3,2) und s(1,0) = (-4,3) + s_U((1,0)-(-4,3)) = (-4,3)+s_U(5,3)

Zur Berechnung von s_U(5,3) gibt es (wie in Aufgabe 26) wieder (mindestens) drei Möglichkeiten.

Version 1: Wir schreiben (1,0) als Summe von Zahlenpaaren in U und der darauf normal stehenden Geraden **R**(1,2):
(1,0) = c1.(2,-1)+c2.(1,2). Dann ist s_U(1,0) = c1.(2,-1)-c2.(1,2).

```
> s_U(5,3):= DotProduct(<2,-1>,<5,3>)/DotProduct(<2,-1>,<2,-1>)*<2,-1> - DotProduct(<1,2>,<5,3>)/DotProduct(<1,2>,<1,2>)*<1,2>;
```

$$s\_U(5,3) := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-29}{5} \end{bmatrix}$$

```
> s(1,0):=<-4,3>+s_U(5,3);
```

$$s(1,0) := \begin{bmatrix} \frac{-17}{5} \\ \frac{-14}{5} \end{bmatrix}$$

Version 2: Wir berechnen s_U(5,3) mit Satz 80: s_U = 2.p_U - Id, dabei ist p_U die orthogonale Projektion
von **R**^2 auf U und Id die identische Funktion von **R**^2 nach **R**^2. Also: s_U(5,3) = 2.p_U(5,3) - (5,3) = 2.DotProduct(<2,-1>,<5,3>)/DotProduct(<2,-1>, <2,-1>)<2,-1> -(5,3).

```
> s_U(5,3):=  2*(DotProduct(<2,-1>,<5,3>)/DotProduct(<2,-1>,<2,-1>))*<2,-1>-<5,3>;
```

$$s\_U(5,3) := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-29}{5} \end{bmatrix}$$

```
> s(1,0):=<-4,3>+s_U(5,3);
```

$$s(1,0) := \begin{bmatrix} \frac{-17}{5} \\ \frac{-14}{5} \end{bmatrix}$$

Version 3: Wir berechnen die Matrix A von s_U bezüglich der Standardbasis und erhalten s_U(5,3) als Produkt dieser Matrix mit der Spalte <5,3>. Dazu muss zuerst die Transformationsmatrix T von der Standardbasis zur Basis ((2,-1), (1,2)) angeschrieben werden.

```
> T:=Matrix(2,2, [2,1,-1,2]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A:=T.DiagonalMatrix([1,-1]).T^(-1);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

```
> s_U(5,3):= A.<5,3>;
```

$$s\_U(5,3) := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-29}{5} \end{bmatrix}$$

```
> s(1,0):=<-4,3>+s_U(5,3);
```

$$s(1,0) := \begin{bmatrix} \frac{-17}{5} \\ \frac{-14}{5} \end{bmatrix}$$

Die Isometrie t.s ist entweder eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung. Sie ist genau dann eine Spiegelung, wenn das Skalarprodukt von (2,2) und (2,-1) gleich 0 ist (also wenn "senkrecht zur Spiegelungsgeraden verschoben wird"). Das ist hier nicht der Fall (dieses Skalarprodukt ist 3), also ist t.s eine Gleitspiegelung. Um ihre Spiegelungsgerade zu berechnen, muss (2,2) als Linearkombination c1.(2,-1) +c2.(1,2) von (2,-1) und (1,2) geschrieben werden:

```
> c1:= DotProduct(<2,-1>,<2,2>)/DotProduct(<2,-1>, <2,-1>);
  c2:= DotProduct(<1,2>,<2,2>)/DotProduct(<1,2>, <1,2>);
```

$$c1 := \frac{2}{5}$$

$$c2 := \frac{6}{5}$$

Die Spiegelungsgerade G der Gleitspiegelung ist (2/5, -3/5)+ **R**(2,-1) , eine Gleichung dieser Geraden ist x+2y=2/5-6/5 = -4/5 (eine andere z.B. 5x+10y =-4).
Zur Berechnung eines Zahlenpaars (a,b) mit t.s(a,b) = (1,0): (a,b) = s.t^(-1)(1,0) = s(-1,-2) = (-4,3) + s_U(3,-5).
s_U(3,-5) kann wie oben berechnet werden, zum Beispiel:

```
> s_U(3,-5):= A.<3,-5>;
```

$$\text{s\_U}(3, -5) := \begin{bmatrix} \frac{29}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

```
> <a,b>:= <-4,3> + s_U(3,-5);
```

$$\langle a, b \rangle := \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

Zur Probe: t.s(a,b) = (2,2) + (-4,3) + s_U(a+4,b-3).

```
> <2,2>+<-4,3>+A.<9/5+4,18/5-3>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$