Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

14. Mai 2012

49) Berechnen Sie reelle Zahlen a und φ so, dass für alle reellen Zahlen t

$$2 \cdot \sin(3t) + \cos(3t) = a \cdot \sin(3t + \varphi)$$

ist.

50) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der durch die Standardbasis gegebenen Orientierung als orientierten euklidischen Raum. Was ist eine *Drehung* in $\mathbb{R}^3$? Was ist die *Drehachse*, was ist die *Drehebene*, was ist der *Drehwinkel* einer Drehung? Berechnen Sie die Matrix bezüglich der Standardbasis der Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}(1, -2, -2)$ mit Drehwinkel $\frac{5\pi}{6}$. Dabei sei die Drehebene E so orientiert, dass für eine positiv orientierte Basis (u, v) von E die Basis $(u, v, (1, -2, -2))$ von $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert ist.

51) Was ist eine *Drehspiegelung*? Es seien V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V und f die lineare Funktion von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{v}$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

ist. Überprüfen Sie, ob f eine Drehung oder eine Drehspiegelung ist und berechnen Sie in diesem Fall die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels.

52) Was ist eine *Schraubung*? Die folgenden Funktionen f, g von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ nach $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{bmatrix} -\frac{3\,x}{13} + \frac{4\,y}{13} - \frac{12\,z}{13} \\ \frac{12\,x}{13} - \frac{3\,y}{13} - \frac{4\,z}{13} \\ \frac{4\,x}{13} + \frac{12\,y}{13} + \frac{3\,z}{13} \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} + 2 \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} - 1 \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} + 2 \end{bmatrix}$$

53) Die folgenden Funktionen h, k von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ nach $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt. Berechnen Sie die Fixmengen dieser Isometrien.

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \frac{x}{9} - \frac{4\,y}{9} + \frac{8\,z}{9} - 1 \\ -\frac{4\,x}{9} + \frac{7\,y}{9} + \frac{4\,z}{9} - 1 \\ \frac{8\,x}{9} + \frac{4\,y}{9} + \frac{z}{9} + 3 \end{bmatrix}$$

$$k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} \end{bmatrix}$$

54) Was ist eine *Symmetrieoperation*, was ist die *Symmetriegruppe* einer Teilmenge eines euklidischen Raums? Berechnen Sie die Symmetriegruppe des Moleküls Allen (C_3H_4), cf. zum Beispiel http://www.chem.siu.edu/tyrrell/group_theory/allene.html .
Sehen Sie sich zum Beispiel unter
http://www.math.ru.nl/ heckman/Scriptie.pdf (Seite 17) auch das Molekül Buckminsterfulleren (C_{60}) an.