Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

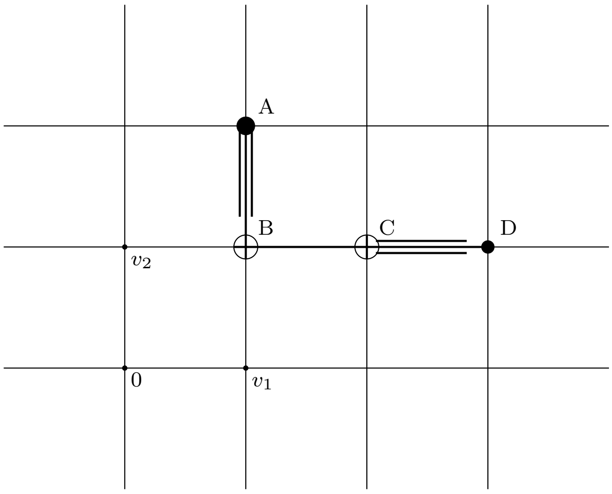
7. Mai 2012

43) Was ist eine *Gleitspiegelung*? Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum.
Es sei s die Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ um die Gerade $(1,2)+\mathbb{R}(3,-2)$ und t die Translation mit $t(0,0)=(2,-1)$.
Zeigen Sie, dass $t \circ s$ eine Gleitspiegelung um eine Gerade G ist.
Berechnen Sie G. Berechnen Sie $s(1,0)$, $t(1,0)$ und $(t\circ s)(1,0)$.
Welches Zahlenpaar wird von dieser Gleitspiegelung auf $(1,0)$ abgebildet?

44) Was ist ein *orientierter Winkel*?
Es sei V der von $v := (-4,0,-3)$ und $w := (2,-1,2)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt). Berechnen Sie den orientierten Winkel von $v+w$ nach $v-w$ bezüglich der durch die Basis (v,w) definierten Orientierung von V.

45) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Was ist eine *Drehung* in V, was ist ihr *Drehwinkel* und ihr *Drehpunkt*? Es seien d die Drehung um den Drehpunkt 0 mit Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$, t die Translation mit $t(0)=2v_1$ und s die Spiegelung um die Gerade $\mathbb{R}(v_1-v_2)$. Begründen Sie: $t\circ s\circ d$ und $t\circ d\circ s$ sind Spiegelungen oder Gleitspiegelungen. Berechnen Sie in jedem Fall die Spiegelungsgerade.

46) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Ein „Roboterarm in V“ sei in $A := v_1+2v_2$ befestigt, A ist mit einem Drehgelenk B in v_1+v_2 verbunden, B ist weiters mit einem Drehgelenk C in $2v_1+v_2$ verbunden und C ist mit der „Roboterhand“ D in $3v_1+v_2$ verbunden. Die Verbindungen von A nach B und von C nach D können verlängert werden. Berechnen Sie die Position der Roboterhand, wenn in B um $\frac{\pi}{4}$ und in C um $\frac{\pi}{3}$ gedreht, und die Abstände von A nach B um $1/3$ und von C nach D um $1/4$ verlängert werden.



47) Berechnen Sie die Fixmengen der folgenden Isometrien und bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (a+1, b+2)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 1, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b + 2)$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b - 1, \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1)$$
$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 2, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b - 4)$$

48) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum, der durch die Basis $(1, i)$ orientiert ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \longmapsto (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z + 2 - i$$

eine Drehung ist. Berechnen Sie ihren Drehpunkt und ihren Drehwinkel.
Zeigen Sie: Jede Drehung um 0 ist eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.