Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

30. April 2012

37) Was ist eine *orthogonale Funktion*? Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt $< v, w >:= Re(\overline{v} \cdot w)$ (für $v, w \in \mathbb{C}$). Es seien $x \in \mathbb{R}$, $z := \cos(x) + i\sin(x)$ und

$$m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, a \longmapsto z \cdot a\,,$$

die Multiplikation mit z. Zeigen Sie, dass m eine orthogonale Funktion ist. Berechnen Sie den Winkel zwischen $2 - 3i$ und $m(2 - 3i)$.

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ihre Matrix bezüglich der Basis $(1, i)$. Geben Sie Bedingungen für a, b, c, d dafür an, dass die Funktion f $\mathbb{C}$-linear bzw. orthogonal ist.

38) Was ist eine *Isometrie* eines euklidischen Raums? Welche Beziehung besteht zwischen Isometrien und orthogonalen Funktionen? Welche der zwei Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x - 2y + 2z + 3, -2x + y + 2z + 1, 2x - 2y + z - 4)$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x - 2y - 2z - 2, -2x + y - 2z, 2x + 2y - z + 2)$$

ist eine Isometrie? Berechnen Sie ihren linearen Anteil und ihren Translationsanteil.

39) Es sei V mit $< -, - >$ ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $\underline{v} := (v_1, v_2)$ eine Orthonormalbasis von V. Mit s und t bezeichnen wir die Translationen mit $s(0) = v_1 - v_2$ und $t(v_1) = 3v_1 + v_2$. Die linearen Funktionen f und g von V nach V sind durch

$$f(v_1) := \frac{3}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2,\ f(v_2) := \frac{4}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2$$

und

$$g(v_1) := \frac{4}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2,\; g(v_2) := -\frac{3}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2$$

definiert. Zeigen Sie, dass f und g orthogonale Funktionen sind. Berechnen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil der Isometrien

$$t \circ f \circ s \circ g \circ s \quad \text{und} \quad s \circ g \circ s \circ f \circ t\,.$$

40) Was besagt der *Spektralsatz* für orthogonale Funktionen? Welche reellen Eigenwerte kann eine orthogonale Funktion haben? Es sei

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix orthogonal ist. Berechnen Sie eine orthogonale 4×4-Matrix T so, dass die Matrix $T^{-1}AT$ Blockdiagonalform mit Blockgrößen 1 oder 2 hat.

41) Was ist eine *Spiegelung*? Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine ON-Basis von V. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : V \longrightarrow V$$
$$c_1v_1 + c_2v_2 \longmapsto (\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}c_2 + 2)v_1 + (\frac{2}{3}\sqrt{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 - 2\sqrt{2})v_2$$

eine Spiegelung ist. Berechnen Sie ihre Fixmenge und eine ON-Basis von V so, dass die Matrix des linearen Anteils der Spiegelung bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

42) Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Matrix der Spiegelung s_U um den von $(1,1,0)$ und $(-1,1,1)$ erzeugten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis. Berechnen Sie eine ON-Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der die Matrix von s_U Diagonalgestalt hat. Berechnen Sie das Bild von $(1,2,3)$ unter der Spiegelung um den zu U parallelen affinen Unterraum, der den Punkt $(1,1,1)$ enthält.