Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

23. April 2012

31) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum* ? Was ist ein *unitärer Raum*? Was ist ein komplexer *Prähilbertraum*? Sei $\langle -,-\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$. Berechnen Sie

$$\langle (1+i, 1-i, -3+2i), (2-3i, -1+i, 2+4i)\rangle$$

und den Abstand zwischen diesen zwei Tripeln. Betrachten Sie dann $\mathbb{C}^3$ als 6-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^6$ und berechnen Sie das reelle Standardskalarprodukt von $(1+i, 1-i, -3+2i) = (1,1,1,-1,-3,2)$ und $(2-3i, -1+i, 2+4i)$ sowie deren Abstand.

32) Was ist eine *Orthonormalbasis* eines unitären Raums? Wieviele Möglichkeiten gibt es, den Vektor

$$\frac{1}{5}(2+i, 2-4i)$$

zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ (mit Standardskalarprodukt) zu ergänzen? Ergänzen Sie diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis und berechnen Sie die Koordinaten von $(1+2i, 2+3i)$ bezüglich dieser Basis.

33) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors v auf einen affinen Unterraum eines unitären Raumes V? Wie ist der *Abstand eines Punktes* von einem affinen Unterraum definiert?
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(1+2i, 2-i) \in \mathbb{C}^2$ auf die Geraden

$$\mathbb{C}\,(1-i, 3+2i) \quad \text{und} \quad (1, 1-i) + \mathbb{C}\,(1-i, 3+2i)\,,$$

und die Abstände von $(1+2i, 2-i)$ zu diesen Geraden.

34) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis in einem euklidischen oder unitären Raum.
Ergänzen Sie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i)$ zu einer ON-Basis von $\mathbb{C}^3$ (mit Standardskalarprodukt). Berechnen Sie die Koordinaten der Standardbasisvektoren bezüglich dieser Basis.

35) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, (1+2i)x - y + (1-2i)z = 0\}$$

von $\mathbb{C}^3$. Entscheiden Sie, ob $(1,2,1)$ in diesem Untervektorraum liegt. Wenn ja, berechnen Sie die Koordinaten von $(1,2,1)$ bezüglich der von Ihnen berechneten Orthonormalbasis.

36) Was ist eine *orthogonale* Matrix? Was ist eine *unitäre* Matrix? Sei $\underline{v} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine ON-Basis eines euklidischen bzw. unitären Raumes V. Welche Eigenschaften muss eine $n \times n$-Matrix T haben, damit das n-Tupel $\underline{v}T$ von Vektoren in V wieder eine ON-Basis von V ist? Überprüfen Sie, ob die folgenden zwei Matrizen unitär sind.

$$\frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix} 1+2i & -2-i \\ 2-i & 1-2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ 2-i & 3+i \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die Spalte

$$\begin{pmatrix} i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Spalten jeder der zwei Matrizen.