Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2011

16. April 2012

25) Durch welche Daten ist eine *lineare Ungleichung* in einem Vektorraum gegeben? Was ist ein *Halbraum*? Es sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}\,, (r,s,t,u) \longmapsto 2r - 3s - t + 3u\,,$$

und $b := -1$.
Berechnen Sie die im Satz 55 angegebenen Daten zur Beschreibung des Halbraumes $L(f, \leq b)$.
Geben Sie eine lineare Ungleichung an, deren Lösungsmenge der Halbraum mit Rand $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$ ist, der $(1,2,3,4)$ enthält.

26) Was ist ein *System von linearen Ungleichungen*? Zeigen Sie, dass die Aufgabe „Finden Sie alle Funktionen f in dem von Sinus und Cosinus erzeugten Untervektorraum im Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$0 \leq \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t \leq 1\,.\text{“}$$

ein System linearer Ungleichungen ist. Stellen Sie dessen Lösungsmenge als Teilmenge der Zeichenebene dar.

27) Was ist ein *endlich erzeugter Kegel*? Eine endliche Teilmenge M eines reellen Vektorraums heißt *minimales Erzeugendensystem* des von M erzeugten Kegels, wenn keine echte Teilmenge von M denselben Kegel erzeugt. Wie kann man entscheiden, ob eine eine endliche Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist? Wie kann man entscheiden, ob M ein minimales Erzeugendensystem des von M erzeugten Kegels ist?

28) Was ist ein *Halbraum*? Was ist ein *Polyeder*? Skizzieren Sie die Polyeder $L(f_1, f_2, f_3, \leq b_1, b_2, b_3)$ für

$$(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (2x-3y, -2x+3y, 2x-y)$$
$$\text{und} \quad (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0),$$
$$(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x, y, -x - 2y)$$
$$\text{und} \quad (b_1, b_2, b_3) = (2, 1, 1),$$
$$(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (x, y) \longmapsto (x, y, 2x + y, y + 2x)$$
$$\text{und} \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 0, -1, -1)$$

und stellen Sie diese als Summen der konvexen Hülle einer endlichen Menge und eines endlich erzeugten Kegels dar!

29) Erläutern Sie, wie man den Durchschnitt eines Kegels in V mit dem Kern einer linearen Funktion von V nach $\mathbb{R}$ berechnet. Es sei K der von

$$(1, 2, 1), (2, 0, -2), (1, -2, 0), (1, 0, -3)$$

erzeugte Kegel in $\mathbb{R}^4$ und

$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ .$$

Berechnen Sie ein endliches Erzeugendensystem des Kegels $K \cap \operatorname{Kern}(g)$!

30) Erläutern Sie, wie man ein System homogener linearer Ungleichungen löst. Berechnen Sie eine endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass der von M erzeugte Kegel die Lösungsmenge des Systems homogener linearer Ungleichungen

$$x + y + 2z \leq 0\,, \quad x - y + z \leq 0\,, \quad 2x - 3y + z \leq 0$$

ist.