Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2011

26. März 2012

19) Was sind *Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume* einer linearen Funktion (mit gleichem Definitions- und Bildbereich)? Es sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3) und $f : V \longrightarrow V$ die lineare Funktion mit

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = (4a - b)v_1 + (2a + b)v_2 + (a + b - 3c)v_3$$

(wobei a, b, c reelle Zahlen sind). Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f.
Gibt es eine Basis von V, deren Vektoren Eigenvektoren von f sind? Wenn ja, berechnen Sie die Matrix von f bezüglich dieser Basis.

20) Sei V der Untervektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$, deren Grad kleiner oder gleich 3 ist. Sei weiters $f\colon V \to V$, $p \mapsto p'' - xp'$. Dabei ist p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung von p.
Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und linear ist. Ist f bijektiv?
Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.
(Die Eigenvektoren von f sind skalare Vielfache der *Hermite-Polynome*).

21) Es sei V der komplexe Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, der von den Funktionen Sinus und Cosinus erzeugt wird.
Berechnen Sie Spur und Determinante der linearen Funktionen

$$D : V \longrightarrow V\,,\; a\cos + b\sin \longmapsto -a\sin + b\cos$$

und $D \circ D$. Kennen Sie diese Funktionen? Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume in V von D und von $D \circ D$.

22) Es seien

$$U_1 := \mathbb{R}\,(1,-1,-1),\ U_2 := \mathbb{R}\,(2,0,1),\ U_3 := \mathbb{R}\,(5,-1,1),$$
$$U_4 := \mathbb{R}\,(1,2,-1) + \mathbb{R}\,(7,3,-1)$$

und

$$U_5 := \mathbb{R}\,(1,2,2) + \mathbb{R}\,(1,0,2)$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Basen der Untervektorräume

$$U_1 + U_2,\ U_1 + U_3,\ U_2 + U_3,$$
$$U_1 + U_2 + U_3,\ U_4 + U_5,\ U_1 + U_4,\ U_3 + U_4\,.$$

Welche dieser Summen sind direkt?

23) Es sei n eine positive ganze Zahl, V der von den Funktionen $sin(k\,\cdot\,) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto sin(kx),\ 1 \leq k \leq n$ und $cos(k\,\cdot\,) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto cos(kx),\ 0 \leq k \leq n$, erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die zweite Ableitung $sin(k\,\cdot\,)''$ von $sin(k\,\cdot\,)$ ist $-k^2 sin(k\cdot\,)$, die von $cos(k\,\cdot\,)$ ist $-k^2 cos(k\,\cdot\,)$.

Zeigen Sie:

$$(1, sin, cos, sin(2\,\cdot\,), cos(2\,\cdot\,), \ldots, sin(n\,\cdot\,), cos(n\,\cdot\,))$$

ist eine Basis von V. Verwenden Sie dazu, dass die Summe der Eigenräume einer linearen Funktion direkt ist. Berechnen Sie die Matrix der Funktion $(\,\cdot\,)'' : V \longrightarrow V,\ f \longmapsto f''$, bezüglich dieser Basis.

24) Was ist eine *affine Funktion*? Was ist der *Schwerpunkt* einer Familie von Vektoren? Was ist der *Mittelpunkt der Strecke* zwischen zwei Vektoren?

Es seien u, v, w Elemente eines reellen Vektorraums und a, b, c die Mittelpunkte der Strecken zwischen u und v, v und w, w und u. Zeigen Sie, dass die Schwerpunkte von (u, v, w) und (a, b, c) gleich sind.

Es sei V die affine Hülle von (u, v, w). Wir nehmen an, dass V zweidimensional ist und betrachten V nach Wahl von u als Nullpunkt als Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau eine affine Funktion von V nach V gibt, die jedem der drei Punkte u, v, w den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei zuordnet.