Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2011

19. März 2012

13) Zeigen Sie: Wenn K ein Körper ist, $A \in K^{m\times n}$, $P \in GL_m(K)$ und $Q \in GL_m(K)$, dann ist die Dimension des Spaltenraums (bzw. Zeilenraums) von A gleich der von PAQ.
(Hinweis: Zeigen Sie dazu:
a. Wenn $T_1, \ldots T_\ell$ eine Basis des Spaltenraums von A ist, dann ist $PT_1, \ldots PT_\ell$ eine Basis des Spaltenraums von PA.
b. Die Spaltenräume von PA und von PAQ sind gleich.)
Folgern Sie daraus mit Satz 17: Der Zeilenraum und der Spaltenraum von A haben dieselbe Dimension.

14) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Durch welche (endlich vielen) Daten wird seine Lösungsmenge beschrieben? Wie werden diese berechnet?
Es seien K ein Körper und

$$V := \{A \in K^{2\times 2} \,|\, A_{11} + A_{22} = 0\} \ .$$

Berechnen Sie

$$Z(M) := \{B \in V \,|\, MB = BM\}$$

(„Zentralisator von M in V“), wobei M eine der folgenden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie zuerst, dass diese Aufgabe ein System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form ist.

15) Es sei V der Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, der von den Funktionen Sinus und Cosinus erzeugt wird.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$D : V \longrightarrow V \ , \ f \longmapsto f'' + 2f' - 2f$$

wohldefiniert, linear und bijektiv ist. Berechnen Sie Spur und Determinante dieser Funktion. Lösen Sie die lineare Gleichung, die durch D und die Funktion Cosinus (in V) gegeben ist.

16) Es sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum, $v, w \in V$, $v \neq w$ und G die Gerade durch v und w. Was heißt es, G in *impliziter Form* anzugeben? Wie bestimmt man die dafür nötigen Daten? Führen Sie das für $V := \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid spur(A) = 0 \}$ und $v := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus!

17) Es seien E ein zweidimensionaler reeller Vektorraum, V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller linearen Funktionen von E nach $\mathbb{R}$, $P \in E$, $Q \in E$ und

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ g \longmapsto (g(P), g(Q))$$

(„Auswerten von linearen Funktionen in P und Q“). Zeigen Sie, dass f linear ist. Finden Sie eine Bedingung an P und Q so,dass gilt: f ist genau dann bijektiv, wenn diese Bedingung an P und Q erfüllt ist.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Aufgabe „Finden Sie eine lineare Funktion g von E nach $\mathbb{R}$ so, dass $g(P) = a$ und $g(Q) = b$ ist!“ ein System linearer Gleichungen (in koordinatenfreier Form) ist. Ist dieses System immer lösbar?

18) Es sei V der von $1, x, x^4$ und x^5 erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x]$ und

$$a : V \longrightarrow \mathbb{Q}^4, \ f \longmapsto (f(2), f(0), f(-2), f(1)),$$

die „Auswertungsfunktion“. Zeigen Sie, dass a linear ist. Ist a bijektiv? Gibt es ein Polynom $g := c_0 + c_1x + c_4x^4 + c_5x^5$ so, dass $f(2) = 0, f(0) = 1, f(-2) = 2, f(1) = 3$ ist?