Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2011

12. März 2012

7) Was ist der *Graph* einer Funktion? Welche Eigenschaft haben Graphen von linearen Funktionen? Wir betrachten die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunkts und einer Basis als Vektorraum $\mathbb{R}^2$. (Also: ein Punkt „ist“ ein Paar von reellen Zahlen). Welche Geraden durch den Nullpunkt sind Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? Zeigen Sie: Wenn f eine solche Funktion ist, dann ist ihr Graph die Lösungsmenge einer Gleichung in zwei Unbekannten. Geben Sie eine solche Gleichung mit Hilfe der Zahl $f(1)$ an.
Kann man auch die Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ geometrisch interpretieren? Beschreiben sie diese Graphen als Lösungsmengen von Systemen linearer Gleichungen.

8) Wie verändert sich die Matrix einer linearen Funktion, wenn anstatt der Basen $\underline{v}$ im Definitionsbereich und $\underline{w}$ im Bildbereich die Basen $\underline{v}S$ und $\underline{w}T$ (S, T invertierbar) gewählt werden?
Es seien $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(a, b) \longmapsto (-b, a)$, $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\underline{v} := \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass d linear und bijektiv ist und dass $\underline{v}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie den Graphen von d durch einige Pfeile in der Ebene. Berechnen Sie die Matrizen $M(d, \underline{e})$ und $M(d, \underline{v})$ von d.

9) Es sei $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(a, b) \longmapsto (b, a)$, $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\underline{v} := \underline{e}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass s linear und bijektiv ist und dass $\underline{v}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie den Graphen von s durch einige Pfeile in der Ebene. Berechnen Sie die Matrizen $M(s, \underline{e})$ und $M(s, \underline{v})$ von s.

10) Wann sind zwei Matrizen *äquivalent*, wann sind sie *ähnlich*?
Geben Sie zwei reelle 2×2-Matrizen an, die zueinander äquivalent, aber nicht ähnlich sind.
Geben Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen im binären Körper $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ an, die zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent sind.
Geben Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen im binären Körper $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ an, die zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ähnlich sind.

11) Was ist die *Spur* und was ist die *Determinante* einer linearen Funktion (deren Definitions- und Bildbereich gleich sind), wie kann man sie berechnen?
$V := \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : V \longrightarrow V \,,\; A \longmapsto AB - BA \,,$$

linear ist.
Berechnen Sie Spur und Determinante von f.

12) Wie überprüft man, ob zwei Matrizen *äquivalent* sind?
Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & 24 \\ 5 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

äquivalent? Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und r der Rang von A. Berechnen Sie invertierbare Matrizen P und Q so, dass PAQ eine Matrix ist, deren Einträge mit Indizes $(1,1), (2,2), \ldots, (r,r)$ gleich 1 und für alle anderen Indizes gleich 0 sind.