

**Proseminar Lineare Algebra und Analytische
Geometrie 2
Sommersemester 2012**

25. Juni 2012

Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein zweidimensionaler euklidischer Raum,
 (v_1, v_2) eine ON-Basis von V und (X_1, X_2) die dazu duale Basis.

- 76) Was ist eine *quadratische Funktion*? Was ist eine *Quadrik*?
Wann sind zwei Quadriken *affin kongruent*? Was ist die *affine Normalform* einer Quadrik? Wie kann sie berechnet werden?
Es seien

$$\begin{aligned} f_1 &: = 2X_1^2 - 2X_1 + 8X_2^2 + 12X_2 + 4 \\ f_2 &: = X_1^2 + 4X_1X_2 + 2X_1 + 4X_2^2 + 2X_2 + 1 \\ f_3 &: = 8X_1X_2 + 6X_1 - 4X_2 - 4 \end{aligned}$$

quadratische Funktionen auf V . Berechnen Sie bijektive affine
Abbildungen g_i von V nach V so, daß die Nullstellenmengen
von

$$f_i \circ g_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

Quadriken in affiner Normalform (bezüglich (v_1, v_2)) sind. Be-
rechnen Sie je fünf Nullstellen von f_1, f_2, f_3 .

- 77) Was ist die *euklidische Normalform* einer Quadrik? Wie kann sie
berechnet werden? Wann sind zwei Quadriken *euklidisch kon-
gruent*? Es sei

$$f := 2X_1^2 + 2X_1X_2 - X_2^2 - X_1 + X_2 + 1.$$

Berechnen Sie eine Isometrie h von V so, daß die Quadrik
 $\mathcal{N}(f \circ h)$ euklidische Normalform hat und skizzieren Sie $\mathcal{N}(f)$.

78) Welche Dimension hat der Vektorraum der quadratischen Formen auf V ? Zeigen Sie, dass die Vereinigung der Menge der quadratischen Funktionen mit der Menge der affinen Funktionen von V nach \mathbb{R} ein Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen von V nach \mathbb{R} ist. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

M sei eine Teilmenge von V mit höchstens 5 Elementen. Zeigen Sie: Es gibt eine quadratische Funktion auf V , deren Nullstellenmenge M enthält.

79) Was ist eine *Ellipse*, was sind die *Brennpunkte einer Ellipse*? Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ellipse

$$E(v_1 + v_2, v_1 + 3v_2, 4)$$

mit der Geraden

$$G := \{v_2 + c(v_1 + v_2) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

80) Was ist eine *Hyperbel*? Was ist eine *Parabel*? Es seien G eine Gerade in V und u ein Punkt von V , der nicht in G liegt.

Zeigen Sie: Die Menge aller Punkte, deren Abstand von u das Doppelte (bzw. die Hälfte) ihres Abstandes von G ist, ist eine Hyperbel (bzw. Ellipse).

81) Was ist die *Tangente* an eine Ellipse in einem ihrer Punkte?

Berechnen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Tangente im Punkt $z := \frac{5}{2}v_1 + 2\sqrt{3}v_2$ an die Ellipse $E(3v_1, -3v_1, 5)$ die Nullstellenmenge von $aX_1 + bX_2 + c$ ist. Berechnen Sie den Winkel zwischen dieser Tangente und der Geraden durch $3v_1$ und z .

E N D E