Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

18. Juni 2012

73) Was ist der zu einem Vektorraum *duale Vektorraum*? Was ist die zu einer Basis *duale Basis*? Es seien V ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum, (v_1, v_2) eine Basis von V, $w_1 := v_1 + v_2$, $w_2 := 2v_1 - v_2$ und (X_1, X_2) die zu (v_1, v_2) duale Basis von V^*. Berechnen Sie die Koordinaten der linearen Funktion

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ aw_1 + bw_2 \longmapsto a - b\,,$$

bezüglich (X_1, X_2).

74) Es seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und q eine quadratische Form auf V. Was ist die durch q definierte *symmetrische Bilinearform*, was ist die *Matrix* von q bezüglich einer Basis $\underline{v}$?
Es seien $V := \mathbb{R}^3$, $\underline{e}$ die Standardbasis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis. Bestimmen Sie die durch die quadratische Form

$$q := X_1^2 - X_1X_2 + 2X_2X_3 + 4X_3^2$$

definierte symmetrische Bilinearform und die Matrix von q bezüglich $\underline{e}$. Bestimmen Sie die quadratische Form p, deren Matrix bezüglich $\underline{e}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

75) Was ist die *Signatur* einer quadratischen Form? Wie berechnet man diese? Es seien $V := \{a \in \mathbb{R}^4 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$, $\underline{v} := ((1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1))$ und $\underline{X}$ die zu $\underline{v}$ duale Basis.
Berechnen Sie die Signatur von $q := X_1X_2 + X_2X_3$. Berechnen Sie eine Basis $\underline{w}$ von V, bezüglich der die Matrix der durch q definierten symmetrischen Bilinearform eine Diagonalmatrix ist.