Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

11. Juni 2012

67) Wann sind zwei Matrizen *kongruent*? Erläutern Sie, wie man eine zu einer gegebenen reellen symmetrischen Matrix kongruente Diagonalmatrix berechnet. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie eine invertierbare 4×4-Matrix P so, daß $P^T \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

68) Was ist die *Signatur* einer reellen symmetrischen Matrix bzw. einer reellen symmetrischen Bilinearform? Berechnen Sie die Signatur der Bilinearform

$$b : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A, B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A^\top \cdot B)$$

und der folgenden zwei reellen symmetrischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} ,\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

69) Wann ist eine reelle symmetrische Matrix *positiv definit*? Wie überprüft man, ob eine reelle symmetrische Matrix positiv definit ist? Wie überprüft man, ob eine reelle Bilinearform ein Skalarprodukt ist? Es seien V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum, $\underline{v}$ eine Basis von V und b_1, b_2, b_3 die Bilinearformen auf V, deren Matrizen bezüglich $\underline{v}$ gleich

$$\begin{pmatrix} 873,204 & 234,456 & 955,678, \\ 234,456 & 775,991 & -128,765 \\ 955,678 & -128,765 & -731,227 \end{pmatrix} ,\ \begin{pmatrix} 14 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

sind. Überprüfen Sie, welche der drei Bilinearformen ein Skalarprodukt ist und berechnen Sie durch Kongruenzumformungen ihrer Matrix eine Orthonormalbasis bezüglich diesem Skalarprodukt von V.

70) Überprüfen Sie, ob $(0,0,0)$ ein relatives Minimum der Funktion

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1^3 + 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_3 - x_2x_3$,

ist.

71) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine positiv definite reelle symmetrische Matrix und

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass B positiv definit ist.
Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung dieser zwei Matrizen!

72) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

symmetrisch und positiv definit ist. Berechnen Sie dann eine positiv definite Matrix P mit $P^2 = A$.