Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

4. Juni 2012

61) Was ist eine *multilineare Funktion*? Es sei (v_1, v_2, v_3) eine Basis eines reellen Vektorraums V und

$$f : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

die multilineare Funktion mit

$$f(v_i, v_j, v_k) := i + j - k\,, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3\,.$$

Berechnen Sie $f(v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 - 3v_3, v_2 + 2v_3)$.
Es sei

$$g : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

die multilineare Funktion mit

$$g(v_i, v_j, v_k) := 1\,, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3\,.$$

Berechnen Sie

$$g(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3)$$

(wobei a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen sind).

62) Was ist eine *alternierende Funktion*? Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

die multilineare Funktion mit

$$f(e_i, e_j, e_k) := (j - i) \cdot (k - j) \cdot (i - k)\,, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3\,.$$

Ist f alternierend? Berechnen Sie $f((2, -1, 3), (1, 0, -1), (1, 2, -1))$.

63) Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die multilineare Funktion mit

$$f(e_i, e_j) := (j - i)e_k, \quad 1 \leq i, j \leq 3\,.$$

Dabei ist für $i \neq j$ der Index k so zu wählen, dass $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ist. Ist f alternierend?
Berechnen Sie $f((1, -1, 2), (3, 1, -2))$ und $f((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3))$, wobei $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind.

64) Was bedeutet es, eine Determinante durch *Entwicklung nach einer Zeile* zu berechnen? Für welche Matrizen ist das sinnvoll? Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen durch Entwicklung nach Zeilen oder Spalten:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

65) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

66) Es sei V ein reeller Vektorraum. Was ist eine *Bilinearform* von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$? Was ist die *Matrix einer Bilinearform* bezüglich einer Basis von V? Zeigen Sie, dass die Funktion

$$b : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \ (A, B) \longmapsto \operatorname{Spur}(A^\top \circ B)$$

bilinear ist und berechnen Sie ihre Matrizen bezüglich der Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)\,.$$