Proseminar Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2012

21. Mai 2012

55) Was sind die *Euler-Winkel* einer Drehung in einem dreidimensionalen orientierten euklidischen Raum?
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , (a, b, c) \longmapsto (-a, -c, -b) ,$$

eine Drehung ist und berechnen Sie ihre Euler-Winkel bezüglich der Standardbasis.

56) Es seien V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum. Was ist eine *Drehung* in V, was ist ihre *Drehachse*? Sei $f \neq Id_V$ eine Drehung in V um eine Drehachse durch 0.
Zeigen Sie: Die Drehachse von f ist das Bild der Funktion

$$f + f^{-1} - (\mathrm{Spur}(f) - 1) \cdot \mathrm{Id}_V \ .$$

57) Was ist die zu einer linearen Funktion *adjungierte* lineare Funktion? Was ist eine *selbstadjungierte* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für selbstadjungierte Funktionen*?
Berechnen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} T$$

eine Diagonalmatrix ist.

58) Was ist eine *normale* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für normale Funktionen*?
Zeigen Sie, dass die lineare Funktion

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ (a, b) \longmapsto (3a - 4b, 4a + 3b)$$

normal ist (das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ sei das Standardskalarprodukt).
Berechnen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f.

59) Was ist eine *orthogonale* Funktion? Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion.
Zeigen Sie: Die lineare Funktion f ist genau dann normal, wenn f selbstadjungiert oder ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Funktion ist.
Zeigen Sie: Wenn f orthogonal ist, dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn f eine Spiegelung oder Id_V oder $-Id_V$ ist.

60) Was ist eine *symmetrische* bzw. *normale* bzw. *selbstadjungierte* Matrix?
Überprüfen Sie, welche dieser Eigenschaften die Matrix

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+i & -1-2i \\ 1+2i & 2+i \end{pmatrix}$$

hat.
Berechnen Sie eine unitäre Matrix T so, dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.