Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Ein Skriptum zur Vorlesung
im Sommersemester 2012

Arne Dür und Franz Pauer

5. Auflage

Vorwort

Das vorliegende Skriptum soll den Hörerinnen und Hörern der Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2“ im Sommersemester 2012 das Mitschreiben und *Mitdenken* in der Vorlesung erleichtern. Das Skriptum enthält alle Definitionen und Sätze der Vorlesung, aber nur wenige Beispiele dazu. In der Vorlesung werden die Definitionen und Sätze motiviert, der Zusammenhang mit früheren Ergebnissen erläutert und Beispiele dazu besprochen. Der Inhalt des Skriptums „Lineare Algebra 1“ und der schriftlichen Unterlagen zur Vorlesung „Vertiefung Lineare Algebra 1“ von Franz Pauer wird als bekannt vorausgesetzt.

In den Kapiteln 1, 3 und 5 werden die Themen Lineare Funktion, Skalarprodukt und Determinante aus dem Wintersemester weitergeführt und vertieft. Im Kapitel 2 werden Systeme linearer Ungleichungen (analog den Systemen linearer Gleichungen) gelöst. Im Kapitel 4 werden die Bewegungen starrer Körper in der Ebene und im Raum beschrieben, dieses Thema ist für die Mechanik von großer Bedeutung. Im Kapitel 6 werden quadratische Funktionen und ihre Nullstellenmengen, die Quadriken, besprochen. Im Kapitel 6 wird die Jordansche Normalform komplexer Matrizen hergeleitet.

Dieses Skriptum ist die 5. Auflage des Skriptums Lineare Algebra 2. Es umfasst (in leicht veränderter Form) Teile der folgenden Skripten:
Arne Dür und Franz Pauer: Lineare Algebra (5. Auflage), 2006.
Arne Dür und Franz Pauer: Analytische Geometrie (3. Auflage), 2005.
Franz Pauer: Lineare Optimierung (2. Auflage), 2003.

Martin Huber danken wir für die Anregung, den Abschnitt 5 in Kapitel 5 (Zeigerrechnung) in das Skriptum aufzunehmen, sowie für die Erlaubnis, dafür seine Materialien in www.tech4math.com zu verwenden. Die Zeichnungen dazu hat Simone Graml angefertigt. Hubert Herdlinger verdanken wir eine Verbesserung des Abschnittes über Systeme linearer Ungleichungen.

Diese Auflage unterscheidet sich von der vierten (Februar 2011) durch den veränderten Titel, die Neuaufnahme von Kapitel 6, die Streichung von Abschnitten, die in der Vorlesung „Vertiefung Lineare Algebra 1“ bereits vorgetragen wurden, Umstellungen in der Reihenfolge der Kapitel und Abschnitte und einige Korrekturen sowie kleine Ergänzungen. nur durch einige Korrekturen.

Innsbruck, Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Mehr über lineare Funktionen

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Der Graph einer linearen Funktion

Satz 1: *Seien $V_1, \ldots, V_\ell$ Vektorräume über K. Dann wird das kartesische Produkt*

$$V_1 \times \cdots \times V_\ell = \{(x_1, \ldots, x_\ell) \mid x_1 \in V_1, \ldots, x_\ell \in V_\ell\}$$

mit der komponentenweisen Addition

$$(x_1, \ldots, x_\ell) + (y_1, \ldots, y_\ell) := (x_1 + y_1, \ldots, x_\ell + y_\ell)$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$c(x_1, \ldots, x_\ell) := (cx_1, \ldots, cx_\ell)$$

mit $c \in K$ ein Vektorraum und heißt der Produktraum *von $V_1, \ldots, V_\ell$.*
Für alle $j \in I$ ist die Projektion auf den j-ten Faktor

$$\mathrm{pr}_j : V_1 \times \cdots \times V_\ell \to V_j\,,\ (x_1, \ldots, x_\ell) \mapsto x_j\,,$$

K-linear. Wenn $(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}), \ldots, (v_{\ell 1}, \ldots, v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1, \ldots, V_\ell$ sind, dann ist

$$((v_{11}, 0, \ldots, 0), \ldots, (v_{1n_1}, 0, \ldots, 0), \ldots$$

$$\ldots, ((0, \ldots, 0, v_{\ell 1}), \ldots, (0, \ldots, 0, v_{\ell n_\ell}))$$

eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$, insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \times \cdots \times V_\ell) = \dim_K(V_1) + \cdots + \dim_K(V_\ell)\,.$$

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist und die Projektionen linear sind (Übung). Wir beweisen daher nur, dass $((v_{11}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, v_{\ell n_\ell}))$ eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ ist. Wir schreiben $x_1 \in V_1, \ldots, x_\ell \in V_\ell$ als Linearkombinationen der Basen $(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}), \ldots, (v_{\ell 1}, \ldots, v_{\ell n_\ell})$:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i} v_{1i},\ \ldots, x_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i} v_{\ell i}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_\ell) &= (x_1,0,\dots,0)+\dots+(0,\dots,0,x_\ell)\\ &= \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i}(v_{1i},0,\dots,0)+\dots+\sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i}(0,\dots,0,v_{\ell i})\end{aligned}$$

und $((v_{11},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,v_{\ell n_\ell}))$ ein Erzeugendensystem von $V_1\times\dots\times V_\ell$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, seien $c_{11},\dots,c_{\ell n_\ell}\in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}(v_{1i},0,\dots,0)+\dots+\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}(0,\dots,0,v_{\ell i}) = (0,\dots,0)\,.$$

Dann ist

$$(\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i},\dots,\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i}) = (0,\dots,0)\,,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i}=0\,,\ \dots\,,\ \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i}=0\,.$$

Da $(v_{11},\dots,v_{1n_\ell}),\dots,(v_{\ell 1},\dots,v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1,\dots,V_\ell$ sind, folgt $c_{11}=\dots=c_{\ell n_\ell}=0$, was zu zeigen war.

Satz 2 : *Es seien V und W Vektorräume über K und $(v_i)_{i\in I}$ eine (beliebige) Basis von V.*

Eine Funktion $f : V\to W$ ist genau dann linear, wenn der Graph von f ein Untervektorraum des Produktraums $V\times W$ ist.

In diesem Fall hat der Graph von f die Basis $((v_i,f(v_i)))_{i\in I}$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(\mathrm{Graph}(f)) = \dim_K(V)\,.$$

Beweis: Nach Definition ist $\mathrm{Graph}(f)=\{(v,f(v))\mid v\in V\}\subset V\times W$. Seien $u,w\in V$ und $c\in K$. Wenn f linear ist, dann ist
$0_{V\times W}=(0_V,0_W)=(0_V,f(0_V))\in\mathrm{Graph}(f)$,
$(u,f(u))+(w,f(w))=(u+w,f(u)+f(w))=(u+w,f(u+w))\in\mathrm{Graph}(f)$
und
$c(w,f(w))=(cw,cf(w))=(cw,f(cw))\in\mathrm{Graph}(f)$,
also $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V\times W$. Wenn umgekehrt $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V\times W$ ist, dann sind
$(u,f(u))+(w,f(w))=(u+w,f(u)+f(w))\in\mathrm{Graph}(f)$ und
$c(w,f(w))=(cw,cf(w))\in\mathrm{Graph}(f)$, somit
$f(u+w)=f(u)+f(w)$ und $f(cw)=cf(w)$, also f linear.
Wenn f linear ist, dann ist auch die Funktion

$$F : V\to\mathrm{Graph}(f)\,,\,x\mapsto(x,f(x))\,,$$

linear und hat die Umkehrfunktion $\mathrm{Graph}(f) \to V$, $(x, f(x)) \mapsto x$. Daher ist F ein Isomorphismus und $(F(v_i))_{i\in I}$ eine Basis von $\mathrm{Graph}(f)$.

Beispiel 3 : Es sei k eine reelle Zahl und f die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto kz$. Dann ist

$$\text{Graph(f)} = \{(z,kz)|z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,k)|z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1,k) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

die Gerade durch $(0,0)$ und $(1,k)$.

Beispiel 4 : Es seien a,b reelle Zahlen und g die lineare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto ax+by$. Dann ist

$$\text{Graph(g)} = \{(x,y,ax+by)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} = \{x\cdot(1,0,a)+y\cdot(0,1,b)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} =$$
$$= \mathbb{R}(1,0,a)+\mathbb{R}(0,1,b) \subseteq \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$$

die Ebene durch $(0,0,0)$, $(1,0,a)$ und $(0,1,b)$.

§2. Basiswechsel

In diesem Abschnitt sei V ein Vektorraum über K mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, $\underline{v} := (v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V, W ein Vektorraum über K mit Dimension $m \in \mathbb{N}$ und $\underline{w} := (w_1,\dots,w_m)$ eine Basis von W. Wenn $f : V \longrightarrow W$ eine Funktion ist, schreiben wir kurz $f(\underline{v})$ anstatt $(f(v_1),\dots,f(v_n))$.

Satz 5 : *Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Funktion mit Matrix $A := M(f,\underline{v},\underline{w}) \in K^{m\times n}$, $u \in V$ und $c \in K^{n\times 1}$ die Koordinatenspalte von u bezüglich $\underline{v}$, also $u = \underline{v}c$. Dann ist*

$$f(\underline{v}) = \underline{w}A \qquad \textit{und} \qquad f(u) = \underline{w}Ac\,.$$

Beweis: Es ist

$$f(\underline{v}) = (f(v_1),\dots,f(v_n)) = (\underline{w}A_{-1},\dots,\underline{w}A_{-n}) = \underline{w}A$$

und

$$f(u) = f(\underline{v}c) = f(\underline{v})c = \underline{w}Ac\,.$$

Satz 6 : *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion mit Matrix*

$$A := M(f,\underline{v},\underline{w}) \in K^{m\times n}\,.$$

Sei $\underline{v}'$ eine weitere Basis von V, $\underline{w}'$ eine weitere Basis von W, $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Transformationsmatrix von $\underline{v}$ zu $\underline{v}'$ und $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ die Transformationsmatrix von $\underline{w}$ zu $\underline{w}'$. Dann ist

$$M(f,\underline{v}',\underline{w}') = S^{-1}AT\,.$$

Im Spezialfall $V = W$, $\underline{v} = \underline{w}$ und $\underline{v}' = \underline{w}'$ ist $S = T$ und

$$M(f, \underline{v}') = T^{-1}AT\,.$$

Beweis: Nach Satz 5 ist

$\underline{w}'M(f,\underline{v}',\underline{w}') = f(\underline{v}') = f(\underline{v}T) = f(\underline{v})T = \underline{w}AT = (\underline{w}'S^{-1})AT = \underline{w}'S^{-1}AT\,.$

Da $\underline{w}'$ eine Basis ist, folgt daraus $M(f,\underline{v}',\underline{w}') = S^{-1}AT\,.$

Definition 7 :

(1) Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ heißen *äquivalent*, wenn es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = PAQ\,.$$

(2) Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = T^{-1}AT\,.$$

Satz 8 :

(1) *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion mit Matrix*

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m\times n}\,.$$

Eine Matrix $B \in K^{m\times n}$ ist genau dann zu A äquivalent, wenn es eine Basis $\underline{v}'$ von V und eine Basis $\underline{w}'$ von W gibt mit

$$M(f, \underline{v}', \underline{w}') = B\,.$$

(2) *Sei $f : V \to V$ eine K-lineare Funktion mit Matrix*

$$A := M(f, \underline{v}) \in K^{n\times n}\,.$$

Eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ ist genau dann zu A ähnlich, wenn es eine Basis $\underline{v}'$ von V gibt mit

$$M(f, \underline{v}') = B\,.$$

Beweis:

(1) Nach Satz 6 sind die Matrizen $M(f,\underline{v},\underline{w})$ und $M(f,\underline{v}',\underline{w}')$ äquivalent. Wenn B zu A äquivalent ist, gibt es $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = PAQ$. Dann ist $\underline{v}' := \underline{v}Q$ eine Basis von V und $\underline{w}' := \underline{w}P^{-1}$ eine Basis von W. Nach Satz 6 ist $M(f,\underline{v}',\underline{w}') = PAQ = B$.

(2) analog.

Ähnliche Matrizen beschreiben (bezüglich verschiedener Basen) dieselbe lineare Funktion. Wird ein physikalisches Phänomen durch eine lineare Funktion von einem endlichdimensionalen Vektorraum V nach V beschrieben und diese (nach Wahl einer Basis von V) durch eine Matrix, dann haben nur jene Eigenschaften dieser Matrix „physikalische Bedeutung", die sich beim Übergang zu einer ähnlichen Matrix nicht ändern. Beispiele für solche Eigenschaften von Matrizen sind die Determinante und die „Spur".

Definition 9 : Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann heißt

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

die *Spur* von A.

Satz 10 :

(1) *Die Funktion* $\operatorname{spur} : K^{n\times n} \longrightarrow K$ *ist linear.*
(2) *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt:* $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.
(3) *Für* $A \in K^{n\times n}$ *und* $T \in GL_n(K)$ *gilt:* $\operatorname{spur}(T^{-1}AT) = \operatorname{spur}(A)$.
(4) *Sei* $f : V \to V$ *eine lineare Funktion und* A *die Matrix von* f *bezüglich* $\underline{v}$. *Dann ist*

$$\operatorname{spur}(f) := \operatorname{spur}(A)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{v}$ *und heißt* Spur *von* f.

Beweis: (1) und (2) nachrechnen, (3) folgt aus (2), (4) aus (3).

Satz 11 :

(1) *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt:* $\det(AB) = \det(BA)$.
(2) *Für* $A \in K^{n\times n}$ *und* $T \in GL_n(K)$ *gilt:* $\det(T^{-1}AT) = \det(A)$.
(3) *Sei* $f : V \to V$ *eine lineare Funktion und* A *die Matrix von* f *bezüglich* $\underline{v}$. *Dann ist*

$$\det(f) := \det(A)$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\underline{v}$ *und heißt* Determinante *von* f.

Beweis:

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$,
(2) folgt aus (1),
(3) folgt aus (2).

§3. Bild und Kern einer linearen Funktion

In diesem Abschnitt seien V und W Vektorräume über K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Funktion.

Definition 12 : Die Menge

$$\operatorname{Bild}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

heißt *Bild* von f und die Menge

$$\operatorname{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$$

heißt *Kern* von f.

Satz 13 : $\operatorname{Bild}(f)$ *ist ein Untervektorraum von W,* $\operatorname{Kern}(f)$ *ist ein Untervektorraum von V.*
Die Dimension des Bildes von f heißt Rang von f *(Schreibweise* $\operatorname{rg}(f)$*).*

Beweis: Da f linear ist, ist $0_V \in \operatorname{Kern}(f)$. Für $u, v \in \operatorname{Kern}(f)$ und $c \in K$ folgt aus $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_W$ auch $u + v \in \operatorname{Kern}(f)$, sowie aus $f(cu) = cf(u) = 0_W$ auch $cu \in \operatorname{Kern}(f)$. Daher ist $\operatorname{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V. Analog zeigt man, dass $\operatorname{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von W ist.

Satz 14 : *Sei $A \in K^{m\times n}$ und $L(A,0) := \{x \in K^{n\times 1} \,|\, Ax = 0\}$ der Lösungsraum des durch A definierten Systems homogener linearer Gleichungen. Fasst man die Matrix A als lineare Funktion*

$$A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}\,, x \mapsto Ax\,,$$

auf, dann ist $\operatorname{Kern}(A) = L(A,0)$ *und* $\operatorname{Bild}(A) = {}_K\langle A_{-1}, \ldots, A_{-n}\rangle$.

Beweis: Es ist $\operatorname{Kern}(A) = \{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = 0\} = L(A,0)$ und $\operatorname{Bild}(A) =$ $= \{\,Ax \,|\, x \in K^{n\times 1}\,\} = \{\,\sum_{i=1}^{n} x_i A_{-i} \,|\, x_1, \ldots x_n \in K\,\} = {}_K\langle A_{-1}, \ldots, A_{-n}\rangle$.

Satz 15 : *Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion und $r :=$* $\operatorname{rg}(f)$*. Dann gibt es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V so, dass*

(1) $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ *eine Basis von* $\operatorname{Bild}(f)$ *und*
(2) $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* $\operatorname{Kern}(f)$

ist. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(\operatorname{Bild}(f)) + \dim_K(\operatorname{Kern}(f))\,.$$

Ergänzt man die Basis $(f(v_1),\dots,f(v_r))$ *von* Bild(f) *zu einer Basis* $(w_1,\dots,w_m)$ *von* W, *dann ist*

$$D_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

(nur an den Stellen $(1,1),\dots,(r,r)$ *stehen Einsen und sonst Nullen) die Matrix von* f *bezüglich der Basen* $(v_1,\dots,v_n)$ *und* $(w_1,\dots,w_m)$.

Beweis: Sei $(w_1,\dots,w_r)$ eine Basis von Bild(f). Dann kann man Urbilder $v_1,\dots,v_r\in V$ von $w_1,\dots,w_r$ unter f wählen. Sei $(u_1,\dots,u_s)$ eine Basis von Kern(f). Dann ist

$$(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$$

ein Erzeugendensystem von V, weil für $y\in V$ aus

$$f(y)=\sum_{i=1}^r a_iw_i=\sum_{i=1}^r a_if(v_i)=f(\sum_{i=1}^r a_iv_i)$$

folgt, dass $z:=y-\sum_{i=1}^r a_iv_i\in \mathrm{Kern}(f)$ ist. Daher ist $y=z+\sum_{i=1}^r a_iv_i$ eine Linearkombination von $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$.

Wir zeigen noch, dass $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $c_1,\dots,c_r,d_1,\dots,d_s\in K$ mit

$$\sum_{i=1}^r c_iv_i+\sum_{j=1}^s d_ju_j=0\,.$$

Dann ist $0=f(\sum_{i=1}^r c_iv_i+\sum_{j=1}^s d_ju_j)=\sum_{i=1}^r c_if(v_i)=\sum_{i=1}^r c_iw_i$.
Da $(w_1,\dots,w_r)$ linear unabhängig ist, sind alle c_i gleich 0. Dann ist $\sum_{j=1}^s d_ju_j=0$, und aus der linearen Unabhängigkeit von $u_1,\dots,u_s$ folgt $d_1=\dots=d_s=0$. Also ist $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$ die gesuchte Basis von V. Insbesondere ist $r+s=n$.

Satz 16: *Seien* $n\in\mathbb{N}$ *bzw.* $m\in\mathbb{N}$ *die Dimensionen von* V *bzw.* W, $\underline{v}$ *eine Basis von* V, $\underline{w}$ *eine Basis von* W *und* $A:=M(f,\underline{v},\underline{w})\in K^{m\times n}$ *die Matrix von* f. *Dann ist*

$$\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(A)$$

und

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(f))=\dim_K(\mathrm{Kern}(A))\,.$$

Beweis: Die Koordinaten-Funktionen

$$h:V\to K^{n\times 1}\,,\,\underline{v}c\mapsto c\,,$$

und

$$k : W \to K^{m\times 1}\,,\ \underline{w}d \mapsto d\,,$$

sind Isomorphismen. Fassen wir A als lineare Funktion

$$K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}\,, x \mapsto Ax\,,$$

auf, dann ist $f = k^{-1} \circ A \circ h$. Weil k und h Isomorphismen sind, prüft man leicht nach, dass $k(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Bild}(A)$ und $h(\mathrm{Kern}(f)) = \mathrm{Kern}(A)$ ist. Daher ist

$$\mathrm{rg}(f) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) = \dim_K(k(\mathrm{Bild}(f))) = \dim_K(\mathrm{Bild}(A)) = \mathrm{rg}(A)$$

und

$$\dim_K(Kern(f)) = \dim_K(h(Kern(f))) = \dim_K(\mathrm{Kern}(A))\,.$$

Satz 17 :

(1) *Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ vom Rang r ist zur Matrix*

$$D_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

äquivalent, wo nur an den Stellen $(1,1),\dots,(r,r)$ Einsen stehen und sonst Nullen.

(2) *Zwei Matrizen $A,B \in K^{m\times n}$ sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang besitzen.*

Beweis:

(1) folgt aus Satz 8, Satz 15 und Satz 16.
(2) folgt aus (1), Satz 8 und Satz 16.

Zur Berechnung von invertierbaren Matrizen P,Q mit $PAQ = D_r$:
Die Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix PA in Stufenform umgeformt werden. Analog kann PA durch elementare Spaltenumformungen (Multiplikation mit Elementarmatrizen von rechts) auf die Form $PAQ = D_r$ gebracht werden. Die Matrix $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ kann berechnet werden, indem man die elementaren Spaltenumformungen auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} PA \\ I_n \end{pmatrix}$$

anwendet und als Ergebnis

$$\begin{pmatrix} PA \\ I_n \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} PAQ \\ Q \end{pmatrix}$$

erhält.

Satz 18 : *Für $A \in K^{m\times n}$ gilt*

$$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)\,.$$

Insbesondere haben der Zeilenraum und der Spaltenraum von A die gleiche Dimension („Zeilenrang= Spaltenrang“).

Beweis: Nach Satz 17,(2) gibt es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, dass $PAQ = D_r$ ist, wobei $r := \mathrm{rg}(A)$ ist. Dann ist

$$D_r = (D_r)^T = (PAQ)^T = Q^T A^T P^T$$

mit $P^T \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q^T \in \mathrm{GL}_n(K)$, also A^T äquivalent zu D_r. Nach Satz 17 folgt, dass auch A^T den Rang r hat.
Der Zeilenraum von A ist der Spaltenraum von A^T.

Es sei $A \in K^{m\times n}$ und $L(A,0)$ die Lösungsmenge des durch A definierten homogenen Systems linearer Gleichungen. In der Vorlesung „Einführung in die Mathematik 1“ wurde gezeigt, dass $L(A,0)$ ein Untervektorraum von $K^{n\times 1}$ ist, dessen Dimension gleich $n - \mathrm{rg}(A)$ ist. Der Rang von A ist nach Definition die Dimension des Spaltenraums von A, also die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A. Nach Satz 18 ist $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$, also auch gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A. Die Spalten von A entsprechen den „Unbekannten“ des durch A gegebenen Systems linearer Gleichungen, die Zeilen von A den „Gleichungen“. Daher kann die Dimension von $L(A,0)$ als „Anzahl der Unbekannten minus Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen“ beschrieben werden.

§4. Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form

Definition 19 : Ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form* ist eine Aufgabe:

- Gegeben sind eine lineare Funktion $f : V \to W$ und ein Vektor $y \in W$.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge

$$L(f,y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in V \mid f(x) = y\}$$

  aller Vektoren $x \in V$, für die $f(x) = y$ ist.

Die Menge $L(f,y)$ heißt *Lösungsmenge* des durch f und y gegebenen Systems linearer Gleichungen. Ihre Elemente heißen *Lösungen* dieses Systems.

Das durch f und y gegebene System linearer Gleichungen heißt *homogen*, wenn $y = 0_W$ ist, ansonsten *inhomogen*. Die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen ist

$$L(f,0) = \mathrm{Kern}(f)\,.$$

Satz 20 : *Sei $f : V \to W$ K-linear, $y \in W$ und $z \in L(f,y)$ (also ist $L(f,y)$ insbesondere nicht leer). Dann ist*

$$L(f,y) = z + \mathrm{Kern}(f)$$

ein affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum $\mathrm{Kern}(f)$.
Das durch f und y gegebene System „lösen“ bedeutet daher: finde (irgend)ein Urbild z von y unter f und (irgend)eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.
Falls V endlichdimensional ist, gilt weiters

$$\dim_K(L(f,y)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f)\,.$$

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann ist $f(z+v) = f(z) + f(v) = y + 0 = y$, also $z + v \in L(f,y)$.

Sei $x \in L(f,y)$. Dann ist $f(x-z) = f(x) - f(z) = y - y = 0$, also $x - z \in \mathrm{Kern}(f)$ und $x = z + (x-z) \in \{z + v \mid v \in \mathrm{Kern}(f)\}$.
Nach Satz 15 ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f)$.

Beispiel 21 : Fasst man eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ als eine lineare Funktion

$$f : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}\,, x \mapsto Ax\,,$$

auf, dann ist $L(f,y) = L(A,y)$.

Beispiel 22 : Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\}$ und

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,, f \mapsto f'\,,$$

wobei f' die Ableitung der Funktion f bezeichnet. Dann sind $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation Vektorräume über $\mathbb{R}$, und die Funktion D ist $\mathbb{R}$-linear. Der Unterraum $\mathrm{Kern}(D)$ besteht aus allen konstanten Funktionen. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ heißt *Stammfunktion* von $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wenn $Df = g$ ist. Die Menge aller Stammfunktionen von g ist

$$L(D,g) = f + \mathrm{Kern}(D).$$

Satz 23 : *Seien V,W Vektorräume über K der Dimensionen n,m mit Basen $\underline{v}, \underline{w}$, sei $f : V \to W$ K-linear mit Matrix*

$$A := M(f,\underline{v},\underline{w}) \in K^{m\times n}$$

und $y = \underline{w}b \in W$. Dann bildet der Koordinaten-Isomorphismus

$$V \to K^{n\times 1}\,, \underline{v}c \mapsto c\,,$$

$L(f,y)$ auf $L(A,b)$ ab und $\mathrm{Kern}(f)$ *auf* $L(A,0)$.

Beweis: Nach Satz 5 ist $\underline{v}c \in L(f,y)$ genau dann wenn $\underline{w}(Ac) = \underline{w}b$, also $c \in L(A,b)$ ist.

Nach Satz 23 kann für $f : V \to W$ und $y \in W$ das System linearer Gleichungen (f,y) wie folgt gelöst werden:

(1) Wähle Basen $\underline{v}$, $\underline{w}$ von V,W.
(2) Berechne die Matrix $A := M(f,\underline{v},\underline{w})$ und die Koordinatenspalte b von y bezüglich $\underline{w}$.
(3) Berechne die Lösungsmenge $L(A,b)$.
Wenn $L(A,b)$ leer ist, dann ist auch $L(f,y)$ leer.
Wenn $z \in L(A,b)$ und $(u_1,\dots,u_s)$ eine Basis von $L(A,0)$ ist, dann ist $\underline{v}z \in L(f,y)$ und $(\underline{v}u_1,\dots,\underline{v}u_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Im Schulunterricht entsprechen Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form gewissen „Textaufgaben", und die Umwandlung in die Form $Ax = b$ nennt man „den Ansatz finden".

Beispiel 24: Wir suchen alle Polynomfunktionen $p \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$p(-1) = 2, p(1) = 1, p(2) = 1 \text{ und } \mathrm{gr}(p) < 5\,.$$

Sei $V := \{q \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{gr}(q) < 5\}$, $W := \mathbb{R}^3$,

$$f : V \longrightarrow W\,,\ q \longmapsto (q(-1),q(1),q(2))\,,$$

und $y := (2,1,1) \in W$. Die Funktion f ist linear.
Wir wählen die Basis $\underline{v} := (1,x,x^2,x^3,x^4)$ von V und die Standardbasis $\underline{w} := (e_1,e_2,e_3)$ von $W = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$A := M(f,\underline{v},\underline{w}) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet mit dem Gauß-Verfahren

$$L(A,b) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$L(f,y) = \{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 +$$
$$+ c(-2 + x + 2x^2 - x^3) + d(-4 + 5x^2 - x^4) \mid c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

Satz 25: *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und Z ein affiner Unterraum von V. Dann ist Z die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen, d.h. es gibt eine lineare Funktion*

$f : V \to W$ und einen Vektor $y \in W$ mit

$$Z = L(f, y)\,.$$

(Dann ist Z durch f und y „in impliziter Form“ *gegeben).*
Wenn der affine Unterraum Z durch einen Aufpunkt p und eine Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ des parallelen Untervektorraums gegeben ist, dann kann ein solches System linearer Gleichungen auf die folgende Weise berechnet werden:

Ergänze $(u_1, \ldots, u_k)$ zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ von V. Setze

$$f : V \longrightarrow K^{n-k}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \longmapsto (c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n)$$

und $y := f(p)$.

Beweis: Seien f und y wie im Satz definiert. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \,=_K\!< u_1, \ldots, u_k >$ und $p \in L(f, y)$. Nach Satz 20 ist $Z = L(f, y)$.

Hilfssatz 26 : *Seien V ein Vektorraum über K und U, U' Untervektorräume von V. Dann ist auch $U \cap U'$ ein Untervektorraum.*

Beweis: Übung.

Satz 27 : *Seien V ein Vektorraum über K und Z, Z' affine Unterräume von V mit $Z \cap Z' \neq \emptyset$. Dann ist auch $Z \cap Z'$ ein affiner Unterraum, und der parallele Untervektorraum von $Z \cap Z'$ ist der Durchschnitt der parallelen Untervektorräume von Z und Z'.*

Wenn Z und Z' in impliziter Form gegeben sind, d.h. $Z = L(f, y)$ und $Z' = L(f', y')$, dann ist $Z \cap Z' = L(g, (y, y'))$ mit

$$g : V \to W \times W'\,,\ v \mapsto (f(v), f'(v))\,,$$

d.h. man erhält die Gleichungen für $Z \cap Z'$ durch „Zusammenschreiben“ der Gleichungen für Z und für Z'.

Beweis: Aus $Z = L(f, y)$ und $Z' = L(f', y')$ folgt
$Z \cap Z' = \{v \in V \mid f(v) = y \text{ und } f'(v) = y'\} = L(g, (y, y'))$.
Man prüft leicht nach, dass g K-linear ist. Daher ist $Z \cap Z'$ ein affiner Unterraum von V mit $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(f')$ als parallelem Untervektorraum.

Hilfssatz 28 : *Seien V ein Vektorraum über K und $U_1,\dots,U_\ell$ Untervektorräume von V. Dann ist*

$$U_1+\cdots+U_\ell := \{u_1+\cdots+u_\ell \mid u_1\in U_1,\dots,u_\ell\in U_\ell\}$$

ein Untervektorraum von V, enthält $U_1,\dots,U_\ell$ und heißt die Summe *von $U_1,\dots,U_\ell$.*

Beweis: Übung.

Satz 29 : *Sei V ein Vektorraum über K und seien U,U' Untervektorräume von V. Dann gilt*

$$\dim_K(U+U') = \dim_K(U)+\dim_K(U')-\dim_K(U\cap U')\,.$$

Beweis: Die Funktion

$$f : U\times U' \to V\,,\ (u,u')\mapsto u+u'\,,$$

ist linear mit $\mathrm{Bild}(f)=U+U'$ und
$\mathrm{Kern}(f)=\{(u,u')\in U\times U' \mid u+u'=0\}=\{(u,-u)\mid u\in U\cap U'\}$.
Da die Funktion

$$U\cap U' \to \mathrm{Kern}(f)\,,\ u\mapsto (u,-u)\,,$$

ein Isomorphismus ist, gilt $\dim_K(\mathrm{Kern}(f))=\dim_K(U\cap U')$. Aus Satz 15 und Satz 1 folgt

$$\begin{aligned}\dim_K(U+U') &= \dim_K(U\times U')-\dim_K(\mathrm{Kern}(f))\\ &= \dim_K(U)+\dim_K(U')-\dim_K(U\cap U')\,.\end{aligned}$$

§5. Injektive und surjektive lineare Funktionen

Satz 30 :

(1) *Die Menge*

$$\mathrm{Lin}_K(V,W) := \{f \mid f : V\to W\ K\text{-}linear\}$$

aller linearen Funktionen von V nach W ist ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(V,W)$ aller Funktionen von V nach W mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation.

(2) *Die Menge $\mathrm{Lin}_K(V,V)$ ist mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderausführung $\circ$ ein Ring mit Einselement Id_V, und für $a\in K$ und $f,g\in\mathrm{Lin}_K(V,V)$ gilt*

$$a(f\circ g)=(af)\circ g = f\circ(ag)\,.$$

(3) *Die Menge*

$$\mathrm{GL}_K(V) := \{f \mid f : V\to V\ K\text{-}linear\ und\ bijektiv\}$$

ist mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe mit Einselement Id_V *und heißt die* allgemeine lineare Gruppe *von* V.

Beweis: Übung.

Definition 31: M und N seien Mengen. Eine Funktion $f : M \longrightarrow N$ ist *injektiv* bzw. *surjektiv* genau dann, wenn jedes Element von N höchstens bzw. mindestens ein Urbild hat.

Beispiel 32: M und N seien Mengen. Eine Funktion $f : M \longrightarrow N$ ist genau dann bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Satz 33: *Sei* $f : V \to W$ *eine lineare Funktion und* $\underline{v} := (v_i)_{i\in I}$ *eine Familie in* V. *Es sei*

$$f(\underline{v}) := (f(v_i))_{i\in I}\,.$$

(1) *Sei* $\underline{v}$ *ein Erzeugendensystem von* V. *Dann ist* f *genau dann surjektiv, wenn* $f(\underline{v})$ *ein Erzeugendensystem von* W *ist.*
Insbesondere: Wenn $(v_i)_{i\in I}$ *ein Erzeugendensystem von* V *ist, dann ist* $(f(v_i))_{i\in I}$ *ein Erzeugendensystem von* $\mathrm{Bild}(f)$.
(2) *Sei* $\underline{v}$ *eine Basis von* V. *Dann ist* f *genau dann injektiv, wenn* $f(\underline{v})$ *linear unabhängig ist.*
(3) *Sei* $\underline{v}$ *eine Basis von* V. *Dann ist* f *genau dann bijektiv, wenn* $f(\underline{v})$ *eine Basis von* W *ist.*

Beweis:

(1) Wenn $f(\underline{v})$ ein Erzeugendensystem von W ist, dann gibt es zu einem beliebigen $w \in W$ eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ so, dass $w = \sum_{i\in I} c_i f(v_i)$ ist. Weil f linear ist, ist $w = f(\sum_{i\in I} c_i v_i) \in \mathrm{Bild}(f)$, also f surjektiv.
Wenn umgekehrt f surjektiv ist, dann existiert zu einem beliebigen $w \in W$ ein Urbild $y \in V$. Da $\underline{v}$ ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ so, dass $y = \sum_{i\in I} c_i v_i$ ist. Weil f linear ist, ist $w = f(y) = \sum_{i\in I} c_i f(v_i)$ eine Linearkombination von $f(\underline{v})$, also $f(\underline{v})$ ein Erzeugendensystem von W.

(2) Sei $f(\underline{v})$ linear unabhängig und $y, z \in V$ mit

$$f(y) = f(z)\,.$$

Seien $y = \sum_{i\in I} c_i v_i$ und $z = \sum_{i\in I} d_i v_i$, dann ist

$$0 = f(y) - f(z) = \sum_{i\in I} c_i f(v_i) - \sum_{i\in I} d_i f(v_i) = \sum_{i\in I} (c_i - d_i) f(v_i),$$

somit $c_i = d_i$ für alle $i \in I$. Daher muss $y = z$ sein und f ist injektiv. Wenn umgekehrt f injektiv ist, dann ist für eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ mit $0 = \sum_{i\in I} c_i f(v_i) = f(\sum_{i\in I} c_i v_i)$ auch $\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$. Da $\underline{v}$ linear unabhängig ist, folgt $c_i = 0$ für alle $i \in I$, also ist $f(\underline{v})$ linear unabhängig.

(3) folgt aus (1) und (2).

Satz 34: *Sei $f : V \to W$ eine lineare Funktion. Die Funktion f ist genau dann injektiv, wenn* $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ *ist.*

Beweis: Wenn f injektiv ist, dann gilt für $u \in V$ mit $f(u) = 0$ wegen $f(0_V) = 0_W$ auch $u = 0_V$, also ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$. Wenn umgekehrt $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ ist, dann folgt für $u, v \in V$ aus $f(u) = f(v)$ wegen $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_W$ auch $u = v$.

Satz 35: *Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K mit* $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ *und $f : V \to W$ eine lineare Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist bijektiv.*
(2) *f ist injektiv.*
(3) *f ist surjektiv.*

Beweis: Nach Voraussetzung und Satz 15 gilt

$$\dim_K(W) = \dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) + \dim_K(\mathrm{Kern}(f)) .$$

Wenn f injektiv ist, dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\dim_K(W) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f))$, $W = \mathrm{Bild}(f)$ und f surjektiv. Wenn hingegen f surjektiv ist, dann ist $\mathrm{Bild}(f) = W$, also $\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = 0$, $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ und f injektiv.

§6. Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Abschnitt sei K ein Körper.

Definition 36: Sei V ein Vektorraum über K und $f : V \to V$ eine lineare Funktion.

(1) Ein Vektor $u \in V$ heißt *Eigenvektor* von f, wenn $u \neq 0$ ist und eine Zahl $c \in K$ existiert mit

$$f(u) = cu .$$

In diesem Fall ist c eindeutig bestimmt und heißt der *Eigenwert* von f zum Eigenvektor u.

(2) Die Menge aller Eigenwerte von f

$$\mathrm{Sp}_K(f) := \{c \in K \mid \text{ es gibt ein } u \in V \text{ mit } u \neq 0$$

$$\text{und } f(u) = cu\} \subset K$$

nennt man das *Spektrum* von f. Für $c \in \mathrm{Sp}_K(f)$ ist

$$E(f,c) := \{x \in V \mid f(x) = cx\} = \mathrm{Kern}(c\,\mathrm{Id}_V - f)$$

ein Untervektorraum von V, heißt der *Eigenraum* von f zum Eigenwert c, und besteht aus dem Nullvektor sowie allen Eigenvektoren von f zum Eigenwert c.

Satz 37 : *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion, $\underline{v}$ eine Basis von V und $A := M(f,\underline{v})$ die Matrix von f bezüglich $\underline{v}$.*
Die Spalte $y \in K^{n\times 1}$ ist genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $c \in K$, wenn der Vektor $\underline{v}y \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $c \in K$ ist.

Beweis: $f(\underline{v}y) = \underline{v}Ay$.

Beispiel 38 : Sei

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{g \mid g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ beliebig oft differenzierbar}\}$$

und

$$(-)' : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\, g \mapsto g',$$

wobei g' die Ableitung der Funktion g bezeichnet. Dann ist $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die Funktion $(-)'$ ist $\mathbb{R}$-linear. Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto e^{ct}.$$

Dann gilt

$$(-)'(g_c) = cg_c,$$

also ist g_c ein Eigenvektor von $(-)'$ zum Eigenwert c. Da $c \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt

$$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}((-)') = \mathbb{R}.$$

Da Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist die Familie $(g_c)_{c\in\mathbb{R}}$ linear unabhängig.

Satz 39 : *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f : V \to V$ eine lineare Funktion. Dann ist $c \in K$ genau dann Eigenwert von f, wenn*

$$\det(c \operatorname{Id}_V - f) = 0$$

ist. Die Funktion

$$\chi_f : K \to K \,,\, z \mapsto \det(z \operatorname{Id}_V - f) \,,$$

heißt das charakteristische Polynom *von f.*

Beweis: Es ist c Eigenwert von f genau dann, wenn ein Vektor $u \in V$ mit $u \neq 0$ existiert, sodass $f(u) = cu$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die lineare Funktion

$$c \operatorname{Id}_V - f : V \to V \,,\, x \mapsto cx - f(x) \,,$$

nicht injektiv ist. Nach Satz 35 ist $c \operatorname{Id}_V - f$ nicht injektiv genau dann, wenn $c \operatorname{Id}_V - f$ nicht bijektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\det(c \operatorname{Id}_V - f) = 0$ ist.

Satz 39 legt folgendes Verfahren nahe, die Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Funktion $f : V \to V$ zu berechnen, falls V endlich-dimensional ist:

(1) Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und bestimme die Matrix A von f bezüglich $\underline{v}$. Dann ist $cI_n - A$ die Matrix von $c \operatorname{Id}_V - f$ bezüglich $\underline{v}$.
(2) Finde alle $c \in K$ mit $\det(cI_n - A) = 0$.
(3) Bestimme für jeden Eigenwert c von f den Eigenraum $E(f,c) = L(c \operatorname{Id}_V - f, 0)$ durch Lösen des durch $cI_n - A$ gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen.

Satz 40 : *Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K der Dimension n, $f : V \to V$ eine lineare Funktion und χ_f das charakteristische Polynom von f. Dann gilt:*

(1) *χ_f ist eine Polynomfunktion mit $\operatorname{gr}(\chi_f) = n$.*
(2) *χ_f ist normiert.*
(3) *Der Koeffizient von χ_f bei X^{n-1} ist $\operatorname{spur}(f)$.*
(4) *Der Koeffizient von χ_f bei 1 ist $(-1)^n \det(f)$.*

Somit hat χ_f die Gestalt

$$\chi_f = X^n - \operatorname{spur}(f) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f).$$

Für ($K = \mathbb{R}$ und n ungerade) oder ($K = \mathbb{C}$ und $n > 0$) besitzt f mindestens einen Eigenvektor.

Beweis: Folgt aus der Definition des charakteristischen Polynoms und der Determinante.

Satz 41 : *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und seien $U_1,\dots,U_\ell$ Untervektorräume von V.*
Die Summe $U_1+\cdots+U_\ell$ heißt direkt, *wenn für alle $u_1 \in U_1,\dots,u_\ell \in U_\ell$ aus $u_1+\cdots+u_\ell = 0$ auch $u_1 = \cdots = u_\ell = 0$ folgt. In diesem Fall schreibt man*

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$$

und es gilt:

(1) *Für alle $u \in U_1+\cdots+U_\ell$ sind die Summanden $u_1 \in U_1,\dots,u_\ell \in U_\ell$ in der Darstellung*

$$u = u_1+\cdots+u_\ell$$

eindeutig bestimmt.

(2) *Sind $(u_{11},\dots,u_{1n_1}),\dots,(u_{\ell 1},\dots,u_{\ell n_\ell})$ Basen von $U_1,\dots,U_\ell$, dann ist $(u_{11},\dots,u_{1n_1},\dots,u_{\ell 1},\dots,u_{\ell n_\ell})$ eine Basis von $U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$.*

(3) $\dim_K(U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell) = \dim_K(U_1)+\cdots+\dim_K(U_\ell)$.

Beweis: Die Funktion

$$F : U_1 \times \cdots \times U_\ell \to U_1+\cdots+U_\ell\,,\ (u_1,\dots,u_\ell) \mapsto u_1+\dots u_\ell\,,$$

ist linear und surjektiv. Wenn die Summe $U_1+\cdots+U_\ell$ direkt ist, dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also F injektiv und F ein Isomorphismus. Damit folgen (1) aus der Injektivität von F und (2),(3) aus Satz 1.

Satz 42 : *Sei V ein Vektorraum über K, $f : V \to V$ eine lineare Funktion und $\mathrm{Sp}_K(f) = \{c_1,\dots,c_\ell\}$. Dann gilt:*

(1) *Die Summe der Eigenräume von f ist direkt, d.h.*

$$E(f,c_1)+\cdots+E(f,c_\ell) = E(f,c_1) \oplus \cdots \oplus E(f,c_\ell)\,.$$

(Die Summe der Eigenräume ist im Allgemeinen aber nicht der ganze Vektorraum V).

(2) *Die Zahl der Eigenwerte ist durch die Dimension beschränkt, d.h.*

$$\#(\mathrm{Sp}_K(f)) \le \dim_K(V)\,.$$

Beweis:

(1) Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(2) Nach Definition ist ein Eigenraum nicht der Nullraum und hat daher mindestens Dimension 1. Nach Satz 41 folgt

$$\begin{aligned}\#(\mathrm{Sp}_K(f)) = \ell &\leq \dim_K(E(f,c_1)) + \cdots + \dim_K(E(f,c_\ell)) \\ &= \dim_K(E(f,c_1) \oplus \cdots \oplus E(f,c_\ell)) \leq \dim_K(V)\,,\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

§7. Affine Funktionen

V und W seien Vektorräume über einem Körper K.

Definition 43 : Eine Funktion a: $V \longrightarrow W$ heißt *affin*, wenn es eine lineare Funktion $f : V \longrightarrow W$ und einen Vektor $w \in W$ gibt mit

$$a = t_w \circ f\,,$$

wobei t_w die Translation um w in W ist, d.h. es ist

$$a(x) = f(x) + w$$

für alle $x \in V$. Insbesondere ist $w = a(0)$ und $f = t_{(-w)} \circ a$, also sind t_w und f eindeutig durch a bestimmt und heißen der *Translationsanteil* bzw. der *lineare Anteil* von a.

Beispiel 44 : Lineare Funktionen und Translationen sind affine Funktionen.

Beispiel 45 : Jede lineare Funktion von $K^{n\times 1}$ nach $K^{m\times 1}$ ist von der Form $x \mapsto Ax$ mit $A \in K^{m\times n}$. Daher ist jede affine Funktion von $K^{n\times 1}$ nach $K^{m\times 1}$ von der Form $x \mapsto Ax + b$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$, d.h. von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n + b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix}.$$

Satz 46 : *Eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen V und W ist genau dann affin, wenn ihr Graph ein affiner Unterraum von $V \times W$ ist.*

Beweis: Der Graph einer affinen Funktion $a : V \longrightarrow W$ ist

$$Graph(a) = \{(v, a(v))\,|\, v \in V\} = \{(v, f(v) + w)\,|\, v \in V\} =$$

$$= \{(0, w) + (v, f(v))\,|\, v \in V\} = (0, w) + Graph(f) \subseteq V \times W,$$

dabei ist f der lineare Anteil von a und $w := a(0)$. Weil f linear ist, ist $Graph(f)$ ein Untervektorraum von $V \times W$ und somit $(0,w) + Graph(f)$ ein affiner Unterraum.

Ist der Graph einer Funktion $g : V \longrightarrow W$ ein affiner Unterraum $(0,x) + U$, wobei U ein Untervektorraum von $V \times W$ ist und $x \in W$, dann ist U der Graph einer linearen Funktion f und $g = t_x \circ f$ ist eine affine Funktion.

Satz 47 : *Sei $a : V \to W$ eine affine Funktion und M, N affine Unterräume von V. Dann ist $a(M)$ ein affiner Unterraum von W. Wenn M und N parallel sind, dann auch ihre Bilder $a(M)$ und $a(N)$.*

Beweis: Sei $w \in W$ und $f : V \to W$ eine lineare Funktion so, dass $a = t_w \circ f$ ist. Sei $p \in M$ und U der zu M parallele Untervektorraum von V. Dann ist auch $f(U)$ ein Untervektorraum von W, und

$$a(M) = f(M) + w = (f(p) + f(U)) + w = (w + f(p)) + f(U)$$

ist ein affiner Unterraum von W.

Satz 48 : *Die Hintereinanderausführung affiner Funktionen sowie die Umkehrfunktion einer bijektiven affinen Funktion sind wieder affin.*

Beweis: Seien $a : V \to W$ und $b : Y \to Z$ affine Funktionen mit Bild$(a) \subset Y$. Seien $f : V \to W$, $g : Y \to Z$ linear und $w \in W$, $z \in Z$ mit $a = t_w \circ f$ und $b = t_z \circ g$. Dann ist für alle $x \in V$

$$\begin{aligned} b(a(x)) &= g(a(x)) + z = g(f(x) + w) + z = g(f(x)) + g(w) + z \\ &= (t_{g(w)+z}(g(f(x))), \end{aligned}$$

also ist $b \circ a$ wieder affin. Wenn a bijektiv ist, dann ist auch f bijektiv und die Umkehrfunktion $t_{-f^{-1}(w)} \circ f^{-1}$ ebenfalls affin.

Satz 49 : *Sei $a : V \to W$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die Funktion a ist affin.*
(2) *Für jede affine Linearkombination $\sum_{i \in I} c_i v_i$ einer endlichen Familie in V ist*

$$a\left(\sum_{i \in I} c_i v_i\right) = \sum_{i \in I} c_i a(v_i).$$

(„Das Bild einer affinen Linearkombination ist die affine Linearkombination der Bilder“.)

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $w \in W$ und $f : V \to W$ eine lineare Funktion so, dass $a = t_w \circ f$ ist. Dann ist
$a\left(\sum_{i\in I} c_i v_i\right) = w + \sum_{i\in I} c_i f(v_i) = \left(\sum_{i\in I} c_i\right) w + \sum_{i\in I} c_i f(v_i) =$
$= \sum_{i\in I} c_i (w + f(v_i)) = \sum_{i\in I} c_i a(v_i)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $w := a(0)$ und $f := t_{(-w)} \circ a$. Es ist zu zeigen, dass f linear ist.
Seien $c_1, c_2 \in K$ und $x_1, x_2 \in V$. Dann ist
$f(c_1x_1 + c_2x_2) = a(c_1x_1 + c_2x_2) - w =$
$= a(c_1x_1 + c_2x_2 + (1 - c_1 - c_2)0) - w =$
$= c_1a(x_1) + c_2a(x_2) + (1 - c_1 - c_2) \cdot a(0) - w =$
$= c_1(a(x_1) - w) + c_2(a(x_2) - w) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$.

Definition 50 : Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V .
Der *Schwerpunkt* von $(v_i)_{i\in I}$ ist

$$\frac{1}{\#(I)} \sum_{i\in I} v_i \, .$$

Der Schwerpunkt von (v_1, v_2) heißt *Mittelpunkt der Strecke* zwischen v_1 und v_2.

Satz 51 : *Es seien W ein Vektorraum, $a : V \to W$ eine affine Funktion und $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V. Dann gilt:*

(1) *Das Bild der konvexen Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ bezüglich a ist die konvexe Hülle der Familie $(a(v_i))_{i\in I}$ in W .*
(2) *Das Bild des Schwerpunkts von $(v_i)_{i\in I}$ ist der Schwerpunkt von $(a(v_i))_{i\in I}$.*

Beweis: Folgt aus Satz 49.

Beispiel 52 : Es seien P ein Polytop in V und $a : V \to \mathbb{R}$ eine affine Funktion. Dann ist $a(P)$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

KAPITEL 2

Systeme linearer Ungleichungen

§1. Lineare Ungleichungen und Halbräume

In diesem Abschnitt seien n eine positive ganze Zahl, V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $V^* := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller linearen Funktionen von V nach $\mathbb{R}$. Mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die nicht negativ sind.

Definition 53 : Eine *lineare Ungleichung* in V ist durch eine lineare Funktion $0 \neq f \in V^*$ und eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht sind alle Vektoren $v \in V$ mit

$$f(v) \leq b.$$

Die Menge $L(f, \leq b) := \{v \in V \mid f(v) \leq b\}$ heißt *Lösungsmenge* der durch f und b gegebenen linearen Ungleichung, die Elemente von $L(f, \leq b)$ sind *Lösungen* dieser Ungleichung.

Die durch $0 \neq f \in V^*$ und $b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Ungleichung ist *homogen*, wenn $b = 0$ ist.

Sei $L(f, \geq b) := \{v \in V \mid f(v) \geq b\}$. Dann ist

$$L(f, \geq b) = L(-f, \leq -b)$$

die Lösungsmenge der durch $-f$ und $-b$ gegebenen linearen Ungleichung.

Beispiel 54 : Sei $V := \mathbb{R}^{n\times 1}$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x_i .$$

Dann ist $L(f, \leq b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \leq b\}$.

Satz 55 : *Sei $0 \neq f \in V^*$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann kann $L(f, \leq b)$ wie folgt durch endlich viele Daten beschrieben werden:*

> *Berechne eine Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von $\mathrm{Kern}(f)$ und v_n so, dass $f(v_n) = 1$ ist.*

Dann ist

$$L(f,\leq b)=\Big\{\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R},\ c_n\leq b\Big\}.$$

Beweis: Das $n-$Tupel $(v_1,\dots,v_n)$ ist eine Basis von V.

$\subseteq$: Sei $v:=\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\in V$ und $f(v)\leq b$. Dann ist

$$b\geq f(v)=\sum_{i=1}^{n}c_if(v_i)=c_n\ .$$

$\supseteq$: Seien $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ mit $c_n\leq b$. Wegen

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\Big)=c_nf(v_n)\leq b$$

ist $\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\in L(f,\leq b)$.

Beispiel 56 : Sei V der 3-dimensionale Vektorraum aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 0, 1 oder 2, $b:=1$ und f die lineare Funktion

$$f:V\to\mathbb{R},\quad h\mapsto\int_0^1h(t)\mathrm{d}t.$$

Dann bilden

$$v_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto t-\frac{1}{2},\quad \text{und}$$
$$v_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto t^2-\frac{1}{3}$$

eine $\mathbb{R}$-Basis von Kern(f). Für

$$v_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto 1$$

ist $f(v_3)=1$. Also ist

$$L(f,\leq 1)=\{c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3\mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R},c_3\leq 1\}=$$
$$=\Big\{g\in V\mid g(t)=c_2t^2+c_1t+(c_3-\frac{1}{3}c_2-\frac{1}{2}c_1),\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R},\ c_3\leq 1\Big\}.$$

Beispiel 57 : Sei $V:=\mathbb{R}^4$, $b:=2$ und

$$f:V\to\mathbb{R},\quad (a_1,a_2,a_3,a_4)\mapsto a_1+a_2+a_3+a_4.$$

Dann ist $\big((1,0,0,-1),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0)\big)$ eine Basis von Kern(f) und $f\big((0,0,0,1)\big)=1$. Also ist

$$L(f,\leq 2)=\{(c_1+c_2+c_3,-c_3,-c_2,-c_1+c_4)\mid c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R},\ c_4\leq 2\}.$$

Definition 58: Für $v,w \in V$ sei

$$[v,w] := \{sv+tw \mid s,t \in \mathbb{R},\ s,t \geq 0,\ s+t=1\}$$

die Strecke zwischen v und w.

Definition 59: Es seien H eine Hyperebene in V (d. h.: ein affiner Unterraum von V der Dimension $n-1$) und $w \in V \setminus H$. Dann ist

$$\big\{v \in V \mid [v,w] \cap H \subseteq \{v\}\big\}$$

der durch H und w gegebene *Halbraum*. Die Hyperebene H ist der *Rand* dieses Halbraums.

Satz 60: *Jeder Halbraum in V ist die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung.*

Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung ist ein Halbraum.

Eine lineare Ungleichung ist genau dann homogen, wenn 0 *ein Element des Randes ihrer Lösungsmenge ist.*

Beweis: Es seien H eine Hyperebene in V und $w \in V \setminus H$. Wähle eine lineare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ so, dass der Untervektorraum Kern(f) zu H parallel ist. Dann gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(H) = \{b\}$ ist. Wenn $f(w) > b$ ist, ersetze f durch $-f$ und b durch $-b$. Dann ist $f(w) < b$ und $L(f, \leq b)$ ist der durch H und w gegebene Halbraum.

Sei nun durch $0 \neq g \in V^*$ und $c \in \mathbb{R}$ eine lineare Ungleichung gegeben. Dann ist $L(g, \leq c)$ der durch $g^{-1}(c)$ und ein Element von $g^{-1}(c-1)$ gegebene Halbraum.

Die Aussage über homogene lineare Ungleichungen prüft man nun leicht nach.

§2. Systeme linearer Ungleichungen und Polyeder

In diesem Abschnitt sei n eine positive ganze Zahl und V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

Definition 61: Sei k eine positive ganze Zahl. Ein *System von k linearen Ungleichungen* ist durch lineare Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in V^*$ und reelle Zahlen $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht sind alle Vektoren $v \in V$ mit

$$f_1(v) \leq b_1, \ldots, f_k(v) \leq b_k.$$

Die *Lösungsmenge* des Systems ist

$$L(f_1, \ldots, f_k, \leq b_1, \ldots, \leq b_k) := \{v \in V \mid f_1(v) \leq b_1, \ldots, f_k(v) \leq b_k\}.$$

Es ist

$$L(f_1,\dots,f_k,\le b_1,\dots,\le b_k)=\bigcap_{i=1}^{k} L(f_i,\le b_i),$$

also ist $L(f_1,\dots,f_k,\le b_1,\dots,b_k)$ der Durchschnitt von k Halbräumen.

Definition 62 : Ein *Polyeder in V* ist der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen in V.

Nach Satz 60 ist jedes Polyeder in V die Lösungsmenge eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen.

Wenn $\underline{v}=(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V ist, dann werden die linearen Funktionen $f_1,\dots,f_k\in V^*$ eindeutig durch die n-Tupel $\big(f_i(v_1),\dots,f_i(v_n)\big)\in\mathbb{R}^n$ beschrieben, $1\le i\le k$.

Sei $A\in\mathbb{R}^{k\times n}$ definiert durch $A_{ij}:=f_i(v_j)$. Für $b\in\mathbb{R}^{k\times 1}$ sei

$$L(A,\le b):=\{x\in\mathbb{R}^{n\times 1}\mid Ax\le b\}.$$

Dann ist $L(f_1,\dots,f_k,\le b_1,\dots,b_k)=\{\underline{v}x\mid x\in L(A,\le b)\}$.

Beispiel 63 : Die Aufgabe “Finde alle $x\in\mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&\le 2,\\ x_1-2x_2+3x_4&\ge 1,\\ \text{und } x_1-x_2+x_3-x_4&=1\text{ ”}\end{aligned}$$

kann als System linearer Ungleichungen aufgefasst werden, weil die Menge dieser $x\in\mathbb{R}^4$ gleich $L(A,\le(2,-1,1,-1)^T)$ ist, wobei

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\-1&2&0&-3\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(“Jedes System von linearen Gleichungen und Ungleichungen kann in ein System der Form $Ax\le b$ umgeschrieben werden”).

Definition 64 : Eine nichtleere Teilmenge L von V heißt *Kegel (in V)*, wenn jede nichtnegative Linearkombination von Elementen in L wieder in L liegt, d. h.: Für alle $\ell\in\mathbb{N}$, $v_0,\dots,v_\ell\in L$, $c_0,\dots,c_\ell\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ ist $c_0v_0+\cdots+c_\ell v_\ell\in L$.

Für $\ell\in\mathbb{N}$ und $v_0,\dots,v_\ell\in V$ heißt die Menge

$$\mathcal{K}(v_0,\dots,v_\ell):=\Big\{\sum_{i=0}^{\ell}c_iv_i\mid c_0,\dots,c_\ell\in\mathbb{R}_{\ge 0}\Big\}$$

der von $v_0,\dots,v_\ell$ erzeugte Kegel. Ein Kegel L ist *endlich erzeugt*, wenn es $\ell \in \mathbb{N}$ und $v_0,\dots,v_\ell \in V$ gibt, so dass $L = \mathcal{K}(v_0,\dots,v_\ell)$.

Beispiel 65 : Sei $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$ und $0 \neq v \in V$. Dann gibt es in V genau vier Kegel und zwar $\{0\}$, $\mathcal{K}(v)$, $\mathcal{K}(-v)$ und V.

Beispiel 66 : Sei $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ und L ein Kegel in V mit $\{0\} \neq L \neq V$. Dann gibt es eine Basis (v_1,v_2) von V so, dass $L = \mathcal{K}(v_1)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1,-v_1)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1,v_2)$ oder $L = \mathcal{K}(v_1,v_2,-v_1)$ ist.

Beispiel 67 : Die Menge

$$\{z \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \leq z_3^2,\, z_3 \geq 0\}$$

ist ein Kegel in $\mathbb{R}^3$, aber nicht endlich erzeugt.

Satz 68 : *Es seien $u_0,u_1,\dots,u_\ell \in V$, $L := \mathcal{K}(u_0,\dots,u_\ell)$ und $0 \neq g \in V^*$. Dann wird $L \cap Kern(g)$ von der endlichen Menge*

$$E := \big\{u_j \mid g(u_j) = 0,\ 0 \leq j \leq \ell\big\} \cup \\ \cup \big\{g(u_i)u_j - g(u_j)u_i \mid 0 \leq i,j \leq \ell,\ g(u_i) > 0,\ g(u_j) < 0\big\}$$

erzeugt.

Beweis: Wegen $g\big(g(u_i)u_j - g(u_j)u_i\big) = g(u_i)g(u_j) - g(u_j)g(u_i) = 0$ ist der von E erzeugte Kegel $\mathcal{K}(E)$ in $\mathrm{Kern}(g) \cap L$ enthalten.

Seien $c_0,\dots,c_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $w := \sum_{i=0}^{\ell} c_i u_i \in L$ und $g(w) = 0$ ist. Wir zeigen, dass w als nichtnegative Linearkombination von E geschrieben werden kann. Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{i \mid 0 \leq i \leq \ell,\ g(u_i) < 0\}, \\ \mathcal{O} &:= \{i \mid 0 \leq i \leq \ell,\ g(u_i) = 0\}, \\ \mathcal{P} &:= \{i \mid 0 \leq i \leq \ell,\ g(u_i) > 0\} \end{aligned}$$

und

$$d := \sum_{i \in \mathcal{P}} c_i g(u_i) \geq 0.$$

Wegen

$$0 = g(w) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i g(u_i) = \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i g(u_i) + \sum_{i \in \mathcal{P}} c_i g(u_i)$$

ist

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i g(u_i) = -d.$$

Wenn $d = 0$ ist, dann ist $w = \sum_{i\in\mathcal{O}} c_i u_i \in \mathcal{K}(E)$. Wir nehmen daher an, dass $d > 0$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{j\in\mathcal{O}} c_j u_j + \sum_{j\in\mathcal{N}} c_j u_j + \sum_{i\in\mathcal{P}} c_i u_i = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{O}} c_j u_j + \sum_{j\in\mathcal{N}} \frac{1}{d} d c_j u_j + \sum_{i\in\mathcal{P}} \frac{1}{d} d c_i u_i = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{O}} c_j u_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{N}\\ i\in\mathcal{P}}} \frac{1}{d} c_i c_j g(u_i) u_j + \sum_{\substack{i\in\mathcal{P}\\ j\in\mathcal{N}}} \frac{1}{d} c_i c_j \big(-g(u_j)u_i\big) = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{O}} c_j u_j + \sum_{\substack{i\in\mathcal{P}\\ j\in\mathcal{N}}} \frac{1}{d} c_i c_j \big(g(u_i)u_j - g(u_j)u_i\big)
\end{aligned}$$

und $\frac{1}{d} c_i c_j \geq 0$.

Beispiel 69: Sei $V := \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, z \mapsto z_1 + z_2 + z_3$,

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \mathcal{K}\big((1,2,3),(1,1,1),(1,2,1)\big) \quad \text{und} \\
L_2 &:= \mathcal{K}\big((1,-2,-3),(1,-1,1),(1,2,2)\big).
\end{aligned}$$

Dann ist $L_1 \cap \mathrm{Kern}(g) = \mathcal{K}(\emptyset) = \{0\}$ und

$$\begin{aligned}
L_2 \cap \mathrm{Kern}(g) &= \mathcal{K}\big((1,-2,-3)+4(1,-1,1), 5(1,-2,-3)+4(1,2,2)\big) = \\
&= \mathcal{K}\big((5,-6,1),(9,-2,-7)\big).
\end{aligned}$$

Satz 70: *Es seien* $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)$ *eine Basis von* V, $(e_1,\dots,e_k)$ *die Standardbasis von* $\mathbb{R}^k$, $f_1,\dots,f_k \in V^*$ *und*

$$f : V \to \mathbb{R}^k, \quad u \mapsto \big(f_1(u),\dots,f_k(u)\big).$$

Die Menge

$$M := \{(u,y) \in V \times \mathbb{R}^k \mid f_i(u) \leq y_i,\ 1 \leq i \leq k\}$$

ist ein Kegel und wird von der endlichen Menge

$$\big\{\pm\big(v_i, f(v_i)\big) \in V \times \mathbb{R}^k \mid 1 \leq i \leq n\big\} \cup \big\{(0,e_j) \in V \times \mathbb{R}^k \mid 1 \leq j \leq k\big\}$$

erzeugt.

Beweis: Man prüft leicht nach, dass M ein Kegel ist und die Elemente $\pm\big(v_i, f(v_i)\big)$, $1 \leq i \leq n$, sowie $(0,e_j)$, $1 \leq j \leq k$, enthält. Seien $(u,y) \in M$ und $c_1,\dots,c_n$ die Koordinaten von u bezüglich $\underline{v}$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\bar{c}_i := 1$, wenn $c_i \geq 0$, und $\bar{c}_i := -1$, wenn $c_i < 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned}(u,y) &= \big(u, f(u)\big) + \big(0, y - f(u)\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |c_i| \Big(\bar{c}_i \big(v_i, f(v_i)\big)\Big) + \sum_{j=1}^{k} \big(y_j - f_j(u)\big)(0, e_j)\end{aligned}$$

und $|c_i| \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $y_j - f_j(u) \geq 0$, $1 \leq j \leq k$.

Satz 71 : *Die Lösungsmenge eines Systems von endlich vielen homogenen linearen Ungleichungen ist ein endlich erzeugter Kegel. Mit dem folgenden Verfahren kann eine endliche Menge berechnet werden, die diesen Kegel erzeugt:*

Seien $f_1, \ldots, f_k \in V^*$ und

$$p_j : V \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad \big(u, (y_1, \ldots, y_k)\big) \mapsto y_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

- *Berechne mit Satz 70 eine endliche Menge die den Kegel*

  $$M := \{(u,y) \in V \times \mathbb{R}^k \mid f_i(u) \leq y_i,\ 1 \leq i \leq k\}$$

  erzeugt.
- *Für $1 \leq j \leq k$ berechne mit Satz 68 eine endliche Menge E_j, die den Kegel*

  $$\big(M \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} \mathrm{Kern}(p_i)\big) \cap \mathrm{Kern}(p_j)$$

  erzeugt.
- *Dann erzeugt die Menge $\{u \in V \mid (u,0) \in E_k\}$ den Kegel $L(f_1, \ldots, f_k, \leq 0)$.*

Beweis: Folgt aus Satz 68 und Satz 70.

Das Verfahren in Satz 71 kann wie folgt verbessert werden:

Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$.
Falls der Rang von A gleich k ist, können wir $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ so berechnen, dass $A \cdot G = I_k$ ist. (Die Spalte G_{-i} ist ein Element von $L(A, e_i)$, wobei e_i die i-te Standardspalte ist). Dann ist

$$L(A, \leq 0) = L(A, 0) - \mathcal{K}(G_{-1}, G_{-2}, \ldots, G_{-k})\,.$$

Denn: Für $z \in L(A,0)$ und $y \geq 0$ ist $A(z - Gy) = Az - AGy = 0 - y \leq 0$. Also ist $L(A,0) - \mathcal{K}(G_{-1}, G_{-2}, \ldots, G_{-k})$ in $L(A, \leq 0)$ enthalten.
Sei umgekehrt $u \in L(A, \leq 0)$. Dann ist $Au \leq 0$, also $y := -Au \geq 0$ und $Au + y = 0$. Wegen

$$0 = Au + y = Au + AGy = A(u + Gy)$$

ist $u+Gy \in L(A,0)$ und

$$u = (u+Gy)-Gy = (u+Gy)-\sum_{i=1}^{k} y_i G_{-i} \in L(A,0) - \mathcal{K}(G_{-1}, G_{-2}, \dots, G_{-k}).$$

Falls der Rang von A kleiner als k ist, ergänzen wir die Spalten von A durch Standardspalten von $\mathbb{R}^{k\times 1}$ zu einer Matrix $(A|C) =: B \in \mathbb{R}^{k\times(n+s)}$, deren Spalten ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{k\times 1}$ bilden. Dann ist der Rang von B gleich k und

$$L(B, \leq 0) = L(B,0) - \mathcal{K}(H_{-1}, H_{-2}, \dots, H_{-k}),$$

wobei $H \in \mathbb{R}^{n\times k}$ so gewählt wird, dass $B \cdot H = I_k$ ist. Dann ist

$$L(A, \leq 0) = \{u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in L(B, \leq 0)\} = L(B, \leq 0) \cap \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Kern}(q_{n+i}),$$

wobei q_{n+i} die Projektion

$$q_{n+i} : \mathbb{R}^{(n+s)\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x_{n+i}$$

ist. Der Durchschnitt $L(B, \leq 0) \cap \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Kern}(q_{n+i})$ wird mit Satz 68 berechnet.

Der Vorteil dieser Methode gegenüber dem Verfahren in Satz 71 ist, dass nur s-mal (anstatt k-mal) ein Kegel mit dem Kern einer linearen Funktion durchschnitten werden muss.

Auch Satz 68 kann verbessert werden, falls der Kegel L als Lösungsmenge $L(f_1, \dots, f_m, \leq 0)$ eines homogenen Systems linearer Ungleichungen gegeben ist. Dann wird $L \cap \mathrm{Kern}(g)$ sogar von

$$\bigcup_{\ell=1}^{m} (E \cap \mathrm{Kern}(f_\ell))$$

erzeugt.
Beweisidee dazu: Wir verwenden die Bezeichnungen von Satz 68. Seien u_i, u_j so, dass $g(u_i) > 0$ und $g(u_j) < 0$ ist. Falls für alle ℓ gilt: aus $f_\ell(u_i) = 0$ folgt $f_\ell(u_j) < 0$, dann ist für alle ℓ

$$f_\ell(g(u_i)u_j - g(u_j)u_i) = g(u_i)f_\ell(u_j) - g(u_j)f_\ell(u_i) < 0,$$

also liegt $g(u_i)u_j - g(u_j)u_i$ „im Inneren“von L.

Definition 72: Eine Teilmenge M von V ist *konvex*, wenn für je zwei Elemente $v, w \in M$ auch die Strecke $[v,w]$ in M enthalten ist.

Beispiel 73: Polyeder sind konvex.

Beispiel 74: Die konvexe Hülle einer Menge N ist konvex.
Denn: Seien $\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i$ und $\sum_{j=0}^{m} d_j w_j$ konvexe Linearkombinationen von

Elementen in N und $s,t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $s+t=1$. Wegen

$$\sum_{i=0}^{\ell} sc_i + \sum_{j=0}^{m} td_j = s\big(\sum_{i=0}^{\ell} c_i\big) + t\big(\sum_{j=0}^{m} d_j\big) = s+t = 1$$

ist $s(\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i) + t(\sum_{j=0}^{m} d_j w_j) \in \operatorname{conv}(N)$.

Satz 75 : *Sind $v_0,\ldots,v_\ell$ Elemente einer konvexen Menge M in V, dann enthält M auch alle konvexen Linearkombinationen von $v_0,\ldots,v_\ell$.*

Insbesondere: Die konvexe Hülle $conv(N)$ einer Teilmenge N von V ist die (bezüglich Inklusion) kleinste konvexe Teilmenge von V, die N enthält.

Beweis: Induktion über ℓ.

$\ell = 1$: $\operatorname{conv}(\{v_0,v_1\}) = [v_0,v_1] \subseteq M$.

$\ell > 1$: Sei $\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i$ eine konvexe Linearkombination von $v_0,\ldots,v_\ell$ und $s := \sum_{i=1}^{\ell-1} c_i > 0$. Dann ist $w := \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{c_i}{s} v_i$ eine konvexe Linearkombination von $v_0,\ldots,v_{\ell-1}$, nach Induktionsannahme also ein Element von M. Da M konvex und $c_\ell = 1-s$ ist folgt

$$\sum_{i=0}^{\ell} c_i v_i = sw + (1-s)v_\ell \in M.$$

Definition 76 : Für Teilmengen $A \subseteq V$, $B \subseteq V$ sei

$$A+B := \{v+w \mid v \in A,\ w \in B\}$$

die *Summe von A und B*.

Satz 77 : *Es seien $f_1,\ldots,f_k \in V^*$ und $b_1,\ldots,b_k \in \mathbb{R}$. Dann gibt es endliche Teilmengen E und S von V so, dass*

$$L(f_1,\ldots,f_k,\leq,b_1,\ldots,b_k) = conv(E) + \mathcal{K}(S)$$

ist. Also: Jedes Polyeder ist die Summe der konvexen Hülle einer endlichen Menge und eines endlich erzeugten Kegels.

Die Mengen E und S können wie folgt berechnet werden:

- *Sei*

$$\begin{array}{rlcll} \bar{f}_i & : V \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & , \quad 1 \leq i \leq k\,, \\ & (u,t) & \mapsto & f_i(u) - b_i t & \end{array}$$

  und

$$\begin{array}{rlcl} p & : V \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \quad . \\ & (u,t) & \mapsto & t \end{array}$$

- *Berechne mit Satz 71 eine endliche Teilmenge M von $V \times \mathbb{R}$, die den Kegel $L(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k,-p,\leq 0)$ erzeugt.*

- *Dann ist*

$$S := \{u \in V \mid (u,0) \in M\} \quad \textit{und}$$
$$E := \{\frac{1}{t}u \mid (u,t) \in M,\ t \neq 0\}.$$

Beweis: Es seien E und S die mit dem angegebenen Verfahren berechneten Mengen. Es ist zu zeigen, dass

$$L(f_1,\ldots,f_k,\leq b_1,\ldots,b_k) = \operatorname{conv}(E) + \mathcal{K}(S)$$

ist.

$\subseteq$: Sei $x \in L(f_1,\ldots,f_k,\leq b_1,\ldots,b_k)$.
Dann ist $(x,1) \in L(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k,-p,\leq 0)$, also ist $(x,1)$ eine nicht-negative Linearkombination der Elemente in M:

$$(x,1) = \sum_{(u,t)\in M} c_{u,t}(u,t) \text{ mit } c_{u,t} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Wegen

$$(x,1) = \sum_{\substack{(u,t)\in M\\ t\neq 0}} tc_{u,t}\big(\frac{1}{t}u,1\big) + \sum_{(u,0)\in M} c_{u,0}(u,0)$$

ist

$$x = \sum_{\substack{(u,t)\in M\\ t\neq 0}} tc_{u,t}(\frac{1}{t}u) + \sum_{u\in S} c_{u,0}u$$

und

$$\sum_{\substack{(u,t)\in M\\ t\neq 0}} tc_{u,t} = 1.$$

Somit ist $x \in \operatorname{conv}(E) + \mathcal{K}(S)$.

$\supseteq$: Sei $v := \sum_{e\in E} c_e e + \sum_{s\in S} d_s s$ mit $c_e, d_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\sum_{e\in E} c_e = 1$, also $v \in \operatorname{conv}(E) + \mathcal{K}(S)$. Seien $e \in E$ und $s \in S$. Wegen

$$(s,0) \in L(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k,-p,\leq 0)$$

ist $f_i(s) \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, und wegen

$$(e,1) \in L(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_k,-p,\leq 0) = \mathcal{K}(M)$$

ist $f_i(e) \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$. Daher ist

$$\begin{aligned} f_i(v) = &\sum_{e\in E} c_e f_i(e) + \sum_{s\in S} d_s f_i(s) \leq \\ &\leq \Big(\sum_{e\in E} c_e\Big) b_i + \sum_{s\in S} d_s f_i(s) \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq k\ , \end{aligned}$$

also $v \in L(f_1,\ldots,f_k,\leq b_1,\ldots,b_k)$.

KAPITEL 3

Vektorräume mit Skalarprodukt

In diesem Kapitel seien K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und V ein Vektorraum über K.

Wir werden die folgende Eigenschaft der reellen Zahlen verwenden: Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $d \geq 0$ mit $d^2 = a$. Schreibweise: $d =: \sqrt{a}$. Sind a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a < b$, dann ist auch $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

§1. Skalarprodukte

Definition 78 : Für eine komplexe Zahl $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$ heißt

$$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$$

die zu z *konjugierte komplexe Zahl*.
Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ heißt

$$\overline{A} := \left(\overline{A_{ij}}\right)_{i,j}$$

die zu A *konjugierte Matrix*.

Hilfssatz 79 : *Für komplexe Zahlen w und z ist*

$$\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z} \quad \textit{und} \quad \overline{w\cdot z} = \overline{w}\cdot\overline{z}\ .$$

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{C}^{n\times p}$ ist

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \textit{und} \quad \overline{B\cdot C} = \overline{B}\cdot\overline{C}\ .$$

Beweis: Übung.

Definition 80 : Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Funktion

$$\langle -,- \rangle : V\times V \longrightarrow K\ , \quad (v,w) \longmapsto \langle v,w\rangle\ ,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

Für alle $c \in K$, $u,v,w \in V$ gilt

(1) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$
(„$\langle -,- \rangle$ ist *hermitesch*")

(2) $\langle u, c(v+w)\rangle = c\langle u,v\rangle + c\langle u,w\rangle$
(„$\langle -,- \rangle$ ist in der zweiten Komponente linear")

(3) Für $v \neq 0$ ist $\langle v, v\rangle$ eine positive reelle Zahl,
(„$\langle -,-\rangle$ ist *positiv definit*“).

Aus (1) und (2) folgt:

$$\langle c(u+v), w\rangle = \overline{c}\langle u, w\rangle + \overline{c}\langle v, w\rangle \ .$$

Wenn $K = \mathbb{R}$ ist, dann ist

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$$

(„$\langle -,-\rangle$ ist *symmetrisch*“) und $\langle -,-\rangle$ ist in beiden Komponenten linear („$\langle -,-\rangle$ ist bilinear“).

Definition 81: Ein reeller bzw. komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *reeller* bzw. *komplexer Prähilbertraum*. Ein endlich-dimensionaler reeller bzw. komplexer Prähilbertraum heißt *euklidischer* bzw. *unitärer Raum*.

Definition 82: Ist $\langle -,-\rangle$ ein Skalarprodukt auf V, dann heißen die Funktionen

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad v \longmapsto ||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \ ,$$

bzw.

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad (v, w) \longmapsto ||v-w|| := \sqrt{\langle v-w, v-w\rangle} \ ,$$

die von $\langle -,-\rangle$ induzierte *Norm* bzw. *Metrik* auf V. Die Zahl $d(v,w)$ heißt *Abstand* zwischen v und w. Die Zahl $||v|| = d(v,0)$ heißt *Abstand zwischen v und* 0, *Norm*, *Betrag* oder *Länge* von v.

Zwei Vektoren v, w stehen *zueinander senkrecht* oder *orthogonal*, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ ist.

Beispiel 83: Die Funktion

$$\langle -,-\rangle : K^n \times K^n \longrightarrow K \ , \quad ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i \ ,$$

ist ein Skalarprodukt auf K^n und heißt *Standardskalarprodukt* auf K^n. Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von K^n gilt

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \ \|e_i\| = 1 \text{ und } \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}(1-\delta_{ij}), \text{ für } 1 \leq i, j \leq n .$$

Im Spezialfall $n = 1$ und $K = \mathbb{C}$ ist

$$\langle -,-\rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \ , \quad (a, b) \longmapsto \overline{a} b \ ,$$

das Standardskalarprodukt und

$$|z| := \|z\| = \sqrt{\overline{z} z} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

heißt *Betrag* der komplexen Zahl z. Für $w, z \in \mathbb{C}$ ist

$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \ \text{ und } |z| = |\overline{z}| \ .$$

Beispiel 84 : Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und V der Vektorraum aller stetigen Funktionen vom Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$. Die Abbildung

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \ , \quad (f, g) \longmapsto \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \ ,$$

ist ein Skalarprodukt auf V. Die Norm von $f \in V$ ist

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad .$$

Satz 85 : *Es seien V mit $\langle -, - \rangle$ ein Prähilbertraum und v, w Vektoren in V. Dann ist*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

(„Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung“).
Weiters sind die Zahlen $|\langle v, w \rangle|$ und $\|v\| \cdot \|w\|$ genau dann gleich, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis: Wenn $v = 0$ oder $w = 0$ ist, dann ist $|\langle v, w \rangle| = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$.
Seien nun $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Wenn v und w linear abhängig sind, gibt es ein $c \in K$ mit $w = c \cdot v$. Daher ist

$$|\langle v, w \rangle| = |c| \langle v, v \rangle = |c| \cdot \|v\|^2 = \|v\| \cdot \|w\| \ .$$

Wenn v und w linear unabhängig sind, dann ist

$$0 \neq w - (\langle v, w \rangle / \langle v, v \rangle) v$$

und

$$0 < \langle w - (\langle v, w \rangle / \langle v, v \rangle) v, w - (\langle v, w \rangle / \langle v, v \rangle) v \rangle = \langle w, w \rangle - (|\langle v, w \rangle|^2 / \langle v, v \rangle) \ .$$

Daher ist

$$|\langle v, w \rangle|^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \ .$$

Beispiel 86 : Für $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und $a, b \in \mathbb{C}^n$ ergibt sich

$$|\sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$$

als Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

Satz 87 : *Ist V mit $\langle -, - \rangle$ ein unitärer Raum, dann ist V mit*

$$\mathrm{Re}(\langle -, - \rangle) : V \times V \to \mathbb{R} \quad , \quad (v, w) \longmapsto \mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) \ ,$$

ein euklidischer Raum (mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$) und die von $\langle -, - \rangle$ und $\mathrm{Re}(\langle -, - \rangle)$ induzierten Normen sind gleich.

Beweis: Übung.

§2. Orthonormalbasen

Sei $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.

Definition 88 : Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *orthonormal* bezüglich $\langle -, - \rangle$, wenn für alle $i, j \in I$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *Orthonormalbasis* (kurz: *ON-Basis*) von V bezüglich $\langle -, - \rangle$, wenn sie eine Basis von V und orthonormal bezüglich $\langle -, - \rangle$ ist.

Beispiel 89 : Die Standardbasis von K^n ist eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarproduktes.

Satz 90 : *Eine orthonormale Familie ist linear unabhängig.*
Insbesondere: Wenn V endlich-dimensional ist, dann ist jede orthonormale Familie mit $\dim_K(V)$ *Elementen eine ON-Basis von V.*

Beweis: Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie und $(c_i)_{i \in I}$ eine Koeffizienten-Familie in K. Wenn $\sum_{i \in I} c_i v_i = 0$ ist, dann ist für alle $j \in I$ auch

$$0 = \langle v_j, \sum_{i \in I} c_i v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \langle v_j, v_i \rangle = c_j \ .$$

Satz 91 : *Sei $w \in V$ und $(v_i)_{i \in I}$ eine ON-Basis von V. Dann ist*

$$w = \sum_{i \in I} \langle v_i, w \rangle v_i \ .$$

(„Die Koordinate von w bei v_i ist das Skalarprodukt von v_i mit w“.*)*

Beweis: Sei $w = \sum_{i \in I} c_i v_i$. Dann ist

$$\langle v_j, w \rangle = \langle v_j, \sum_{i \in I} c_i v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \delta_{ji} = c_j \ .$$

Satz 92 : *Es sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von V. Mit dem folgenden Verfahren („Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren“) kann eine ON-Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V berechnet werden:*

- $u_1 := w_1$

- *Für* $2 \leq j \leq n$ *sei*

$$u_j := w_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\langle u_i, w_j \rangle / \langle u_i, u_i \rangle) u_i$$

- *Für* $1 \leq j \leq n$ *sei*

$$v_j := \|u_j\|^{-1} u_j \, .$$

- $v_1 := \|u_1\|^{-1} u_1$

Insbesondere: Jeder endlichdimensionale Prähilbertraum hat eine ON-Basis. Für alle j *ist* ${}_K\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = {}_K\langle w_1, \ldots, w_j \rangle$.

Beweis: Nach Definition ist $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, $1 \leq i \leq n$. Es genügt also zu zeigen, dass für alle $1 \leq k < \ell \leq n$ die Vektoren u_k und u_ℓ zueinander senkrecht stehen. Das kann einfach nachgerechnet werden:

$$\langle u_k, u_\ell \rangle = \langle u_k, w_\ell - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\langle u_i, w_\ell \rangle / \langle u_i, u_i \rangle) u_i \rangle =$$

$$= \langle u_k, w_\ell \rangle - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\langle u_i, w_\ell \rangle / \langle u_i, u_i \rangle) \delta_{ki} \langle u_k, u_k \rangle = \langle u_k, w_\ell \rangle - \langle u_k, w_\ell \rangle = 0 \, .$$

Nach Satz 90 ist dann $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, daher wegen $\dim_K(V) = n$ auch eine Basis.

Definition 93: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn

$$A \cdot A^T = I_n$$

ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *unitär*, wenn

$$A \cdot \overline{A}^T = I_n$$

ist.
Wir schreiben $\mathcal{O}_n$ bzw. $\mathcal{U}_n$ für die Menge aller orthogonalen bzw. unitären $n \times n$-Matrizen.

Definition 94: G mit $G \times G \longrightarrow G$, $(a, b) \longmapsto a \cdot b$, sei eine Gruppe. Eine *Untergruppe* von G ist eine nicht-leere Teilmenge H von G mit den Eigenschaften: Wenn $a \in H$ ist, dann auch a^{-1}. Wenn $a, b \in H$ sind, dann auch $a \cdot b$. Schreibweise: $H \leq G$.

Satz 95: *Die Mengen* $\mathcal{O}_n$ *bzw.* $\mathcal{U}_n$ *sind Untergruppen von* $GL_n(\mathbb{R})$ *bzw.* $GL_n(\mathbb{C})$ *und heißen* orthogonale *bzw.* unitäre Gruppe.
Es ist $\mathcal{O}_n = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{U}_n$.

Beweis: Übung.

Satz 96 : *Es seien $\underline{v} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine ON-Basis von V, $S \in K^{n\times n}$ und $\underline{u} := (u_1, \ldots, u_n) = \underline{v}S$. Dann ist*

$$S = (\langle v_i, u_j \rangle)_{1\leq i,j\leq n}$$

und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) *$\underline{u}$ ist eine ON-Basis von V;*
(2) *die Matrix S ist orthogonal (wenn $K = \mathbb{R}$ ist) bzw. unitär (wenn $K = \mathbb{C}$ ist);*
(3) *die Spalten von S bilden eine ON-Basis von $K^{n\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt;*
(4) *die Zeilen von S bilden eine ON-Basis von $K^{1\times n}$ mit dem Standardskalarprodukt.*

Beweis: Mit Satz 91 folgt

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle \underline{v}S_{-i}, \underline{v}S_{-j} \rangle = \sum_{k,\ell} \overline{S}_{ki} S_{\ell j} \langle v_k, v_\ell \rangle =$$

$$= \sum_{k,\ell} \overline{S}_{ki} S_{\ell j} \delta_{k\ell} = \sum_{k} \overline{S}_{ki} S_{kj} = \langle S_{-i}, S_{-j} \rangle = (\overline{S}^T \cdot S)_{ij} \; ,$$

damit ist die Behauptung leicht nachzuprüfen.

Definition 97 : Es seien U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V. Dann ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \text{ für alle } u \in U \text{ ist } \langle u, v \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum von V und heißt *das orthogonale Komplement von U in V*.

Satz 98 : *Es seien U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V, $v \in V$ und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine ON-Basis von U.*

(1) *Der Vektor*

$$p_U(v) := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i \in U$$

hängt nicht von der Wahl der ON-Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ ab und heißt Fußpunkt des Lotes von v auf U. *Die Funktion*

$$p_U : V \longrightarrow V \, , \; v \longmapsto p_U(v) \, ,$$

heißt orthogonale Projektion *von V auf U.*

(2) *Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig als Summe eines Vektors in U und eines Vektors in $U^\perp$ schreiben, und zwar*

$$v = p_U(v) + (v - p_U(v)) ,$$

wobei $p_U(v) \in U$ und $(v - p_U(v)) \in U^\perp$ ist. Insbesondere ist $U \cap U^\perp = \{0\}$ und $V = U + U^\perp := \{y + y' \mid y \in U, y' \in U^\perp\}$.

(3) *Für $v \in V$ und $y \in U$ mit $p_U(v) \neq y$ ist*

$$\|v - y\| > \|v - p_U(v)\| ,$$

das heißt: $p_U(v)$ ist der eindeutig bestimmte Vektor in U, der von v den kleinsten Abstand hat.

Beweis:

(1) Es sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine ON-Basis von U. Es ist zu zeigen, dass $p_U(v) = \sum_{k=1}^n \langle w_k, v\rangle w_k \in U$ ist. (Dann hängt $p_U(v)$ nicht von der Wahl der ON-Basis in U ab). Nach Satz 91 ist

$$u_i = \sum_{j=1}^n \langle w_j, u_i\rangle w_j\,,\ 1 \leq i \leq n .$$

Daher ist

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j=1}^n \langle w_j, u_i\rangle w_j, v\rangle \sum_{k=1}^n \langle w_k, u_i\rangle w_k =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle w_j, u_i\rangle} \langle w_j, v\rangle \langle w_k, u_i\rangle w_k =$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n \langle w_j, v\rangle \sum_{i=1}^n (\overline{\langle w_j, u_i\rangle} \langle w_k, u_i\rangle)) w_k = (\text{ cf. Satz 91 })$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n \langle w_j, v\rangle \langle w_j, w_k\rangle) w_k = \sum_{k=1}^n \langle w_k, v\rangle) w_k .$$

(2) Für $y \in U$ ist $\langle v, y\rangle = \langle p_U(v), y\rangle$, daher

$$\langle v - p_U(v), y\rangle = \langle v, y\rangle - \langle p_U(v), y\rangle = 0 ,$$

daher ist $v - p_U(v) \in U^\perp$ und $v = p_U(v) + (v - p_U(v)) \in U + U^\perp$. Wenn $y \neq 0$ ist, dann ist $0 < \langle y, y\rangle$, also $y \notin U^\perp$. Daher ist $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(3) Für $y \in U$ mit $p_U(v) \neq y$ ist $0 \neq p_U(v) - y \in U$ und $v - p_U(v) \in U^\perp$. Deshalb ist

$$\|v - y\|^2 = \|(v - p_U(v)) + (p_U(v) - y)\|^2 =$$

$$= \|v - p_U(v)\|^2 + \|p_U(v) - y\|^2 > \|v - p_U(v)\|^2 .$$

Beispiel 99: Es seien $0 \neq u \in V$ und U die Gerade Ku. Dann ist $\|u\|^{-1}u$ eine ON-Basis von U. Der Fußpunkt des Lotes von $v \in V$ auf die Gerade U ist

$$p_{Ku}(v) = \langle \|u\|^{-1}u, v\rangle \|u\|^{-1}u = (\langle u,v\rangle / \langle u,u\rangle)u\,.$$

Definition 100: Es seien Z ein endlichdimensionaler affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum U. Der Vektor

$$p_Z(v) := z + p_U(v-z)$$

heißt *Fußpunkt des Lotes* von v auf den affinen Unterraum Z. Die Funktion

$$p_Z : V \longrightarrow V\,,\ v \longmapsto p_Z(v)\,,$$

heißt *orthogonale Projektion* von V auf Z. Die Zahl $\|v - p_Z(v)\|$ heißt *Abstand des Punktes v vom affinen Unterraum Z.*

Satz 101: *Es seien Z und Z' endlichdimensionale affine Unterräume von V mit Aufpunkten z, z' und parallelen Untervektorräumen U, U'. Dann gibt es Elemente $v \in Z$, $v' \in Z$ so, dass für alle $w \in Z$, $w' \in Z$ gilt:*

$$\|w - w'\| \geq \|v - v'\|\ .$$

Die Zahl $\|v - v'\|$ heißt Abstand der affinen Unterräume Z und Z' *und ist gleich dem Abstand des Punktes $z - z'$ vom Untervektorraum $U + U'$.*

Beweis: Es seien $u - u' \in U + U'$ der Fußpunkt des Lotes von $z - z'$ auf $U + U'$, $v := z - u$ und $v' := z' - u'$. Für alle $x \in U$, $x' \in U'$ ist dann

$$\|(z-x)-(z'-x')\| = \|(z-z')-(x-x')\| \geq \|(z-z')-(u-u')\| = \|v-v'\|\ .$$

§3. Lineare Gleichungen mit ungenau bestimmten Daten

Es sei $\langle -,-\rangle$ ein Skalarprodukt auf V, $y \in V$, U ein K-Vektorraum und $f : U \longrightarrow V$ eine lineare Funktion.

Wenn $y \notin \mathrm{Bild}(f) =: W$ ist, dann hat das durch f und y gegebene System linearer Gleichungen keine Lösung. Wenn etwa y durch Messungen (mit Fehlern) bestimmt wurde, kann $L(f,y)$ leer sein, obwohl bei exakter Messung eine Lösung existiert. In diesem Fall legt Satz 98 nahe, y durch den Fußpunkt des Lotes von y auf W zu ersetzen und dann $L(f, p_W(y))$ zu berechnen.

Beispiel 102: „Methode der kleinsten Quadrate“

Gegeben sind ein endlichdimensionaler Untervektorraum U des Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1,\dots,x_n$ und reelle Zahlen $y_1,\dots,y_n$. Gesucht ist eine Funktion $g \in U$ so, dass die Zahlen $g(x_i)$ „möglichst nahe“ bei y_i liegen, $1 \leq i \leq n$.

Wir betrachten dazu die lineare Funktion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad h \longmapsto (h(x_1), \ldots, h(x_n)) \; .$$

Die gesuchte Funktion ist ein Urbild von $y := (y_1, \ldots, y_n)$ bezüglich f. Sei $\underline{u} := (u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U, dann wird das Bild W von f von den n-Tupeln $f(u_1), \ldots, f(u_m)$ erzeugt. Wir wählen auf $\mathbb{R}^n$ das Standardskalarprodukt. Dann ist der Abstand von y zu jedem Punkt von W größer oder gleich dem Abstand von y zu $p_W(y)$, also ist die gesuchte Funktion jenes Element $g \in U$ mit

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - y_i)^2} \; ,$$

für alle $h \in U$. Die Summe $\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - y_i)^2$ der Quadrate der „Fehler in x_i" ist daher für g am kleinsten.
Wir betrachten zwei Spezialfälle:

(1) Sei $U := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Eine Basis von U ist $(Id_{\mathbb{R}})$. Das Bild von f ist die Gerade durch Null und $f(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = (x_1, \ldots, x_n) =: x$. Eine ON-Basis von W ist $(\frac{1}{\|x\|} x)$. Daher:

$$p_W(y) = \langle \frac{1}{\|x\|} x, y \rangle \frac{1}{\|x\|} x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$$

und das Urbild von $p_W(y)$ bezüglich f ist

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \alpha \longmapsto \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \alpha \; .$$

(2) Sei U der Vektorraum aller affinen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Eine Basis von U ist $(E, Id_{\mathbb{R}})$, wobei E die konstante Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$, bezeichnet. Das Bild von f ist die von $(1, \ldots, 1) =: \mathbf{1}$ und $(x_1, \ldots, x_n) =: x$ erzeugte Ebene. Eine ON-Basis von W ist $(\frac{\sqrt{n}}{n} \mathbf{1}, \frac{1}{\|z\|} z)$, wobei $z := x - \frac{\langle x, \mathbf{1} \rangle}{n} \mathbf{1}$. Daher ist

$$p_W(y) = \frac{\langle \mathbf{1}, y \rangle}{n} \mathbf{1} + \frac{\langle z, y \rangle}{\langle z, z \rangle} z = \left(\frac{\langle \mathbf{1}, y \rangle}{n} - \frac{\langle \mathbf{1}, x \rangle}{n} \frac{\langle z, y \rangle}{\langle z, z \rangle} \right) \mathbf{1} + \frac{\langle z, y \rangle}{\langle z, z \rangle} x$$

und das Urbild von $p_W(y)$ bezüglich f ist

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \alpha \longmapsto \left(\frac{\langle \mathbf{1}, y \rangle}{n} - \frac{\langle \mathbf{1}, x \rangle}{n} \frac{\langle z, y \rangle}{\langle z, z \rangle} \right) + \frac{\langle z, y \rangle}{\langle z, z \rangle} \alpha \; .$$

Der Graph von g heißt *Regressionsgerade* der Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

§4. Parallelprojektion

Es sei V ein orientierter dreidimensionaler euklidischer Raum.

Satz 103 : *Es seien E eine Ebene in V und G eine Gerade in V, die nicht parallel sind. Für $v \in V$ sei $\Pi(v)$ der Schnittpunkt der zu G parallelen Geraden durch v mit der Ebene E. Dann ist die Funktion*

$$\Pi : V \longrightarrow V \quad , \quad v \longmapsto \Pi(v) ,$$

affin und heißt die Parallelprojektion auf E längs G.
Wenn $0 \in E$ ist, dann ist Π eine lineare Funktion, deren Kern der zu G parallele Untervektorraum ist.

Beweis: Es seien U und W die zu G und E parallelen Untervektorräume von V. Weil G und E nicht parallel sind, ist V die direkte Summe von U und W. Die Funktion

$$f : V = U \oplus W \longrightarrow V \quad , \quad u + w \longmapsto w ,$$

ist linear und für $v \in V$ und $p \in E$ ist $t_p \circ f \circ t_{-p}(v) = p + f(v - p) \in E$. Wegen $p + f(v - p) = v - ((v - p) - f(v - p)) \in v + U$ ist $t_p \circ f \circ t_{-p}(v)$ der Schnittpunkt der zu G parallelen Geraden durch v mit E, also ist Π die affine Funktion $t_p \circ f \circ t_{-p}$.

Beispiel 104 : Die orthogonale Projektion p_W von V auf einen zweidimensionalen Untervektorraum W ist die Parallelprojektion auf W längs $W^{\perp}$.

Beispiel 105 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$\mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1} \quad , \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x ,$$

die Parallelprojektion auf $\{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_3 = 0\}$ längs $\mathbb{R} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$.

Satz 106 : *Eine affine Funktion von V nach V ist genau dann eine Parallelprojektion auf eine Ebene E, wenn E sowohl ihr Bild als auch ihre Fixmenge ist.*

Beweis: Übung.

Hilfssatz 107 : *Es seien x,y linear unabhängige Vektoren in V. Dann gibt es genau eine positive reelle Zahl c und mindestens ein, aber höchstens zwei Paare von Vektoren $(v,w) \in V^2$ so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\langle v,x\rangle = 0\ , \quad \langle w,y\rangle = 0\ , \quad \langle v,w\rangle = 0\ ,$$
$$\|v\| = 1 = \|w\| \quad \textit{und} \quad \langle v,y\rangle = c = \langle w,x\rangle\ .$$

Beweis: Es seien

$$u_1 := \frac{x}{\|x\|}\ , \quad d := \|y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|}\cdot u_1\|\ , \quad u_2 := \frac{1}{d}\left(y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|}\cdot u_1\right)$$

und u_3 ein Vektor der Länge 1, der zu u_1 und u_2 orthogonal ist. Dann ist (u_1,u_2,u_3) eine ON-Basis von V,

$$d^2 = \langle y,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle}\ , \quad x = \|x\|\cdot u_1 \quad \text{und} \quad y = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|}u_1 + du_2\ .$$

Es seien $v = \sum_{i=1}^3 a_i u_i$ und $w = \sum_{i=1}^3 b_i u_i$ die gesuchten Vektoren.
Aus $\langle v,x\rangle = 0$, $\langle v,y\rangle = c$, und $\|v\| = 1$ folgt

$$a_1 = 0\ , \quad a_2 = \frac{c}{d}\ , \quad a_3^2 = 1 - \frac{c^2}{d^2}\ ,$$

insbesondere muss $c \le d$ sein.
Aus $\langle w,y\rangle = 0$, $\langle w,x\rangle = c$, und $\|w\| = 1$ folgt

$$b_1 = \frac{c}{\|x\|}\ , \quad b_2 = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot\frac{c}{d}\ , \quad b_3^2 = \frac{d^2\langle x,x\rangle - c^2\langle y,y\rangle}{d^2\cdot\langle x,x\rangle}\ ,$$

insbesondere muss $c\cdot\|y\| \le d\cdot\|x\|$ sein.
Die Bedingung $\langle v,w\rangle = 0$ bedeutet dann, dass

$$c^4 - (\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle)c^2 + \langle x,x\rangle d^2 = 0$$

ist und dass die Zahlen $\langle x,y\rangle$ und $a_3\cdot b_3$ entweder beide Null sind oder gleiches Vorzeichen haben. Man kann nun nachprüfen, dass es genau eine positive reelle Zahl c mit $c\cdot\|y\| \le d\cdot\|x\|$ und $c \le d$ gibt, die diese Bedingung erfüllt.
Ist $(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3, b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)$ ein Paar von Vektoren, das die angegebenen Bedingungen erfüllt, dann ist $(a_1u_1 + a_2u_2 - a_3u_3, b_1u_1 + b_2u_2 - b_3u_3)$ das einzige andere.

Satz 108 : *(„Hauptsatz der Axonometrie“)*
Es seien W ein zweidimensionaler Untervektorraum von V und (w_1, w_2, w_3) ein Erzeugendensystem von W. Dann gibt es eine positive reelle Zahl c, eine positiv orientierte ON-Basis $\underline{v} := (v_1, v_2, v_3)$ und eine Parallelprojektion Π von V auf W so, dass für $1 \leq i \leq 3$

$$\Pi(cv_i) = w_i$$

ist. Die Zahl c ist eindeutig bestimmt, für die positiv orientierte ON-Basis $\underline{v}$ gibt es eine oder zwei Möglichkeiten und die Parallelprojektion ist durch $\underline{v}$ und c eindeutig bestimmt.

Beweis: Es sei $\underline{u}$ eine positiv orientierte ON-Basis von V so, dass (u_1, u_2) eine ON-Basis von W ist. Die Matrix einer Parallelprojektion von V auf W bezüglich $\underline{u}$ ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei der Kern dieser Parallelprojektion die Gerade durch 0 und $au_1 + bu_2 - u_3$ ist.
Seien $x, y \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ so, dass für $1 \leq i \leq 3$

$$w_i = x_i u_1 + y_i u_2$$

ist. Die Koordinatenspalten der gesuchten ON-Basis $\underline{v}$ bezüglich $\underline{u}$ bilden eine orthogonale Matrix mit Determinante 1. Wir suchen also eine orthogonale Matrix A und Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

ist. Nach Hilfssatz 107 gibt es ein, aber höchstens zwei Paare von zueinander orthogonalen 3−Spalten (s,t) der Länge 1 und genau eine positive reelle Zahl c so, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ist. Es gibt genau eine 3−Spalte z der Länge 1 so, dass die Matrix $\begin{pmatrix} s & t & z \end{pmatrix}$ orthogonal mit Determinante 1 ist.
Setze daher $A := \begin{pmatrix} s & t & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s & t & z \end{pmatrix}^{-1}$, $a := c^{-1} \sum_{i=1}^3 x_i z_i$ und $b := c^{-1} \sum_{i=1}^3 y_i z_i$.

Beispiel 109 : Es seien $\underline{u}$ eine positiv orientierte ON-Basis von V und W der von $w_1 := u_1$, $w_2 := u_2$, $w_3 := u_1 + u_2$ erzeugte Untervektorraum von V. Dann ist die gesuchte Zahl c gleich 1 und
entweder ist

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)$$

und für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ist

$$\Pi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) = (a_1 + a_3) u_1 + (a_2 + a_3) u_2$$

oder

$$(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ist

$$\Pi(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) = (a_1 - a_3) u_1 + (a_2 - a_3) u_2 \ .$$

KAPITEL 4

Bewegungen in euklidischen Räumen

Es seien V mit $\langle -, - \rangle$ ein euklidischer Raum und $n \in \mathbb{N}$ seine Dimension. In diesem Kapitel werden „Bewegungen starrer Körper“ (zum Beispiel eines Roboterarms) mathematisch beschrieben. Dabei verstehen wir unter „Bewegung“ eines Körpers in V nicht einen „in der Zeit ablaufenden Vorgang“, sondern eine Funktion $f : V \longrightarrow V$, die dem „Ort“ $v \in V$ eines „Massenpunktes“ zur „Zeit 0“ seinen „Ort“ $f(v)$ zur „Zeit 1“ zuordnet. Ein Körper ist „starr“, wenn nach jeder Bewegung die Abstände je zweier seiner „Massenpunkte“ gleichgeblieben sind.

§1. Isometrien

Definition 110 : Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *Isometrie*, wenn für alle v, $w \in V$

$$\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$$

ist. („Isometrien erhalten Abstände.“)
Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *orthogonal*, wenn für alle v, $w \in V$

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

ist. („Orthogonale Funktionen erhalten das Skalarprodukt.“)

Satz 111 : *Jede Translation in V ist eine Isometrie. Die Identität* Id_V *ist die einzige orthogonale Translation.*

Beweis: Sei t eine Translation und $u := t(0)$. Dann ist

$$\|t(v) - t(w)\| = \|(v+u) - (w+u)\| = \|v - w\| .$$

Wenn t orthogonal ist, dann ist

$$\langle u, u \rangle = \langle t(0), t(0) \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0,$$

also $u = 0$ und $t = \mathrm{Id}_V$.

Satz 112 : *Für eine Funktion $f : V \to V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist orthogonal.*
(2) *f ist eine Isometrie und linear.*
(3) *f ist eine Isometrie und $f(0) = 0$.*

Beweis:

$(1) \Rightarrow (2)$: Für alle v, $w \in V$ ist

$$\|f(v)-f(w)\|^2 = \langle f(v)-f(w), f(v)-f(w)\rangle =$$
$$= \langle f(v), f(v)\rangle - 2\langle f(v), f(w)\rangle + \langle f(w), f(w)\rangle \underset{(1)}{=}$$
$$= \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v-w, v-w\rangle = \|v-w\|^2,$$

also ist f eine Isometrie.
Wir zeigen noch, dass f linear ist, das heißt: für alle v, $w \in V$ und für alle c, $d \in \mathbb{R}$ ist $f(cv+dw) - cf(v) - df(w) = 0$.
Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\|f(cv+dw) - cf(v) - df(w)\|^2 = 0 \text{ ist:}$$

$$\|f(cv+dw) - cf(v) - df(w)\|^2 =$$
$$\langle f(cv+dw) - cf(v) - df(w), f(cv+dw) - cf(v) - df(w)\rangle =$$
$$= \langle f(cv+dw), f(cv+dw)\rangle + c^2\langle f(v), f(v)\rangle +$$
$$+ d^2\langle f(w), f(w)\rangle - 2c\langle f(cv+dw), f(v)\rangle -$$
$$-2d\langle f(cv+dw), f(w)\rangle + 2cd\langle f(v), f(w)\rangle \underset{(1)}{=}$$
$$\underset{(1)}{=} \langle cv+dw, cv+dw\rangle + c^2\langle v,v\rangle + d^2\langle w,w\rangle -$$
$$-2c\langle cv+dw, v\rangle - 2d\langle cv+dw, w\rangle + 2cd\langle v,w\rangle =$$
$$= \langle (cv+dw) - cv - dw, (cv+dw) - cv - dw\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$$

$(2) \Rightarrow (3)$: trivial

$(3) \Rightarrow (1)$: Für alle $u \in V$ ist

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \|f(u)\|^2 = \|f(u) - 0\|^2 =$$
$$\|f(u) - f(0)\|^2 = \|u - 0\|^2 = \|u\|^2 = \langle u,u\rangle.$$

Daher gilt für alle v, $w \in V$:

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle f(v), f(v)\rangle +\right.$$
$$\left. + \langle f(w), f(w)\rangle - \langle f(v)-f(w), f(v)-f(w)\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - \|f(v)-f(w)\|^2\right) \underset{(3)}{=}$$
$$\underset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right) = \langle v,w\rangle.$$

Satz 113 :

(1) *Die Zusammensetzung von Isometrien ist eine Isometrie.*
(2) *Jede affine Funktion mit orthogonalem linearen Anteil ist eine Isometrie.*

(3) *Jede Isometrie $f : V \to V$ ist eine affine Funktion, ihr Translationsanteil ist die Translation um $f(0)$ und ihr linearer Anteil ist orthogonal. Kurz: $f = t_{f(0)} \circ g$ mit $g : V \to V$ orthogonal (und damit linear).*

(4) *Die Menge aller Isometrien von V ist mit der Zusammensetzung von Funktionen eine Gruppe und heißt* Isometriegruppe von V. *Inbesondere ist jede Isometrie $f = t_u \circ g$ bijektiv und es ist*

$$f^{-1} = t_{-g^{-1}(u)} \circ g^{-1} .$$

Beweis:

(1) Es seien f, h Isometrien von V und v, $w \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|(f \circ h)(v) - (f \circ h)(w)\| &= \|f(h(v)) - f(h(w))\| = \\ &= \|h(v) - h(w)\| = \|v - w\| ,\end{aligned}$$

also $f \circ h$ eine Isometrie.

(2) Nach Satz 111 und Satz 112 sind Translationen und orthogonale Funktionen Isometrien, also auch ihre Zusammensetzung.

(3) Sei $g := t_{-f(0)} \circ f$. Dann ist $f = t_{f(0)} \circ g$. Nach (1) ist g eine Isometrie, weiters ist $g(0) = -f(0) + f(0) = 0$. Nun folgt aus Satz 112, dass g orthogonal und linear ist.

(4) Es sei $g : V \to V$ der lineare Anteil einer Isometrie. Nach (3) ist g orthogonal.
Ist $v \in V$ so, dass $g(v) = 0$ ist, dann ist $\langle v, v\rangle = \langle g(v), g(v)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$, daher $v = 0$. Also ist g injektiv. Weil Definitions- und Bildbereich von g dieselbe Dimension haben, ist g auch bijektiv.
Für alle $v, w \in V$ ist

$$\left\langle g^{-1}(v), g^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle g(g^{-1}(v)), g(g^{-1}(w))\right\rangle = \langle v, w\rangle ,$$

daher ist g^{-1} orthogonal. Nun prüft man leicht nach, dass die Isometrie $t_{-g^{-1}(u)} \circ g^{-1}$ die Umkehrfunktion von $t_u \circ g$ ist.

Satz 114:

(1) *Die Menge $T(V)$ aller Translationen von V ist eine Untergruppe der Isometriegruppe und heißt* Translationsgruppe von V.

(2) *Die Menge $\mathcal{O}(V)$ aller orthogonalen Funktionen von V ist eine Untergruppe sowohl der Isometriegruppe als auch der Gruppe* $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ *und heißt* orthogonale Gruppe von V.

(3) *Die Translationsgruppe $T(V)$ ist kommutativ, die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(V)$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.*

Beweis: Übung.

§2. Orthogonale Funktionen

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Funktion.

Satz 115 : *Es seien $\underline{v}$ eine ON-Basis von V und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix von f bezüglich $\underline{v}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *Die Funktion f ist orthogonal.*
(2) *Die Familie $f(\underline{v}) := (f(v_1), ..., f(v_n))$ ist eine ON-Basis von V.*
(3) *Die Matrix A ist orthogonal.*

Insbesondere gilt: Wenn f orthogonal ist, dann ist A^T die Matrix von f^{-1} bezüglich $\underline{v}$.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Wenn f orthogonal ist, dann ist

$$\left\langle f(v_i), f\left(v_j\right)\right\rangle = \left\langle v_i, v_j\right\rangle = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Daher folgt die Behauptung aus Satz 90.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Wenn $f(\underline{v}) = \underline{v}A$ eine *ON*-Basis ist, dann ist A orthogonal (Satz 96).

(3) $\Rightarrow$ (1) : Wenn A orthogonal ist, dann ist $\underline{v}A$ nach Satz 96 eine *ON*-Basis. Für $y, z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ist daher

$$\langle f(\underline{v}y), f(\underline{v}z)\rangle = \langle (\underline{v}A)y, (\underline{v}A)z\rangle = \langle y, z\rangle = \langle \underline{v}y, \underline{v}z\rangle .$$

Somit ist f orthogonal.

Satz 116 : *Wenn f orthogonal ist, dann ist*

$$\det(f) \in \{1, -1\} \text{ und } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subseteq \{1, -1\}.$$

Beweis: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix von f bezüglich einer *ON*-Basis. Nach Satz 115 ist $\det(f) = \det(A) \in \{1, -1\}$.
Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $c \in \mathbb{R}$, dann ist
$0 \neq \langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle cv, cv\rangle = c^2 \langle v, v\rangle$, also $c^2 = 1$.

Definition 117 : Ein Untervektorraum W von V ist genau dann *unter f stabil*, wenn $f(W) \subseteq W$ ist.

Satz 118 : *Es seien f orthogonal und W ein unter f stabiler Untervektorraum von V. Dann ist auch $W^{\perp}$ stabil unter f.*

Beweis: Sei $v \in W^{\perp}$. Wir zeigen, dass auch $f(v) \in W^{\perp}$ ist.
Für alle $w \in W$ ist $f(w) \in W$ und, weil f linear und bijektiv ist, auch $f^{-1}(w) \in W$. Daher ist

$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle f^{-1}(f(v)), f^{-1}(w)\right\rangle = \left\langle v, f^{-1}(w)\right\rangle = 0.$$

Beispiel 119 : Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix in oberer Blockdreiecksform

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Blockgröße von B_{11} sei k.
Betrachten wir A als lineare Funktion

$$A : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad , \quad x \longmapsto Ax \, ,$$

dann ist der von $e_1, ..., e_k$ erzeugte Untervektorraum stabil unter A.
Wenn A orthogonal ist, ist auch

$$_{\mathbb{R}}\langle e_1, ..., e_k\rangle^{\perp} = _{\mathbb{R}}\langle e_{k+1}, ..., e_n\rangle$$

stabil unter A, also $B_{12} = 0$. Daher hat jede orthogonale Matrix in Blockdreiecksform sogar Blockdiagonalgestalt.

Definition 120 : Es sei $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine komplexe Matrix. Dann heißt

$$\mathrm{Re}(M) := \left(\mathrm{Re}\left(M_{ij}\right)\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ bzw. } \mathrm{Im}(M) := \left(\mathrm{Im}\left(M_{ij}\right)\right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

der *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von M.

Hilfssatz 121 :

(1) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gibt es n-Spalten $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ so, dass $Ax, Ay \in {}_{\mathbb{R}}\langle x, y\rangle$ ist.*
(2) *Ist $h : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion, dann gibt es einen ein- oder zweidimensionalen Untervektorraum von V, der unter h stabil ist.*

Beweis:

(1) Wegen $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es einen Eigenvektor $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ von A. Sei $c \in \mathbb{C}$ der Eigenwert von z. Dann sind
$\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $A(\mathrm{Re}(z)) = A\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right) =$
$= \frac{1}{2}(Az + A\overline{z})$ =(weil A reell ist) $\frac{1}{2}\left(Az + \overline{Az}\right) = \mathrm{Re}(Az) =$
$= \mathrm{Re}(cz) = \mathrm{Re}(c)\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(c)\mathrm{Im}(z) \in {}_{\mathbb{R}}\langle \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\rangle$.
Analog wird gezeigt: $A(\mathrm{Im}(z)) \in {}_{\mathbb{R}}\langle \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\rangle$.
(2) Sei $\underline{v}$ eine Basis von h und A die Matrix von h bezüglich $\underline{v}$. Seien x, y reelle n-Spalten wie in (1) und W der von den Vektoren $\underline{v}x$ und $\underline{v}y$ erzeugte Untervektorraum von V. Dann ist $f(\underline{v}x) = \underline{v}Ax =$

$\underline{v}(cx+dy) = c(\underline{v}x) + d(\underline{v}y) \in W$, wobei c, d geeignete reelle Zahlen sind.

Satz 122 : *(„Spektralsatz für orthogonale Funktionen")*

(1) *Die Funktion f sei orthogonal. Dann gibt es paarweise aufeinander senkrecht stehende, unter f stabile ein- oder zweidimensionale Untervektorräume $W_1, \ldots, W_k$ von V so, dass*

$$\bigoplus_{i=1}^{k} W_i = V$$

ist.

(2) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ Blockdiagonalform mit Blockgrössen ≤ 2 und orthogonalen Blöcken in der Diagonale hat.*

Beweis: (2) folgt aus (1). Wir zeigen (1) durch Induktion nach n.
Für $n \leq 2$ ist nichts zu zeigen.
Sei $n > 2$. Nach Hilfssatz 121 gibt es einen ein- oder zweidimensionalen Untervektorraum W_1 von V, der unter f stabil ist. Weil f orthogonal ist, ist auch $W_1^{\perp}$ stabil unter f (Satz 118). Wegen $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ und $\dim_{\mathbb{R}}\left(W_1^{\perp}\right) < \dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme.

§3. Spiegelungen

Definition 123 : Es sei $h : V \to V$ eine Funktion. Die Menge

$$Fix(h) := \{v \in V \mid h(v) = v\}$$

heißt *Menge der Fixpunkte* (oder kurz: *Fixmenge*) von h.

Beispiel 124 : $Fix(-Id_V) = \{0\}, Fix(Id_V) = V$.
Die Fixmenge einer linearen Funktion ist ihr Eigenraum zum Eigenwert 1.
Die Fixmenge einer Translation t_u mit $u \neq 0$ ist leer.

Hilfssatz 125 : *Es seien $g : V \to V$ eine lineare Funktion und $u \in V$. Die Fixmenge der affinen Funktion $t_u \circ g$ ist entweder leer oder ein affiner Unterraum von V, dessen paralleler Untervektorraum ist $Fix(g)$.*

Beweis: Die Fixmenge von $t_u \circ g$ ist das Urbild von 0 bezüglich der affinen Funktion $t_u \circ g - Id_V = t_u \circ (g - Id_V)$, also leer oder ein affiner Unterraum. Der zu diesem parallele Untervektorraum ist dann Kern$(g - Id_V)$, also $Fix(g)$.

Definition 126 : Eine Isometrie von V heißt *Spiegelung in V*, wenn ihre Fixmenge eine Hyperebene in V ist, das heißt: die Dimension ihrer Fixmenge ist $n-1$.
Ist M die Fixmenge einer Spiegelung, dann heißt diese *Spiegelung um M*.

Beispiel 127 : Die Funktion

$$\mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad , \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix} x \, ,$$

ist eine Spiegelung in $\mathbb{R}^n$.

Satz 128 : *Es sei s eine Spiegelung.*

(1) *Der lineare Anteil von s ist auch eine Spiegelung, seine Fixmenge ist der parallele Untervektorraum von* $Fix(s)$.
(2) *Wenn s linear ist, dann ist s orthogonal und es gibt eine ON-Basis von V, bezüglich der s die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

hat. Insbesondere ist $\det(s) = -1$ *und* $Sp_{\mathbb{R}}(s) = \{1, -1\}$.
(3) *Zwei Spiegelungen sind genau dann gleich, wenn ihre Fixmengen gleich sind.*
(4) *Es ist* $s^2 = Id_V$.

Beweis:

(1) Nach Satz 113 ist der lineare Anteil von s eine Isometrie, nach Hilfssatz 125 ist seine Fixmenge der parallele Untervektorraum von $Fix(s)$, insbesondere eine Hyperebene in V.
(2) Wähle eine ON-Basis $(v_1, ..., v_{n-1})$ von $Fix(s)$ und ergänze sie zu einer ON-Basis $(v_1, ..., v_{n-1}, v_n)$ von V. Nach Satz 112 ist s orthogonal, daraus folgt mit Satz 115 , dass auch

$$(s(v_1), ..., s(v_n)) = (v_1, ..., v_{n-1}, s(v_n))$$

eine ON-Basis von V ist. Daher muss $s(v_n) = v_n$ oder $s(v_n) = -v_n$ sein. Wegen $Fix(s) \neq V$ muss $s(v_n) = -v_n$ sein.
(3) Es seien $t_v \circ f, \ t_w \circ g$ zwei Isometrien (mit linearen Anteilen f, g), deren Fixmengen gleich sind. Aus (1) folgt, dass $Fix(f) = Fix(g)$

ist. Nun folgt aus (2), dass $f = g$.
Sei u ein Element von $Fix\,(t_v \circ f) = Fix\,(t_w \circ g)$. Dann ist
$u = (t_v \circ f)\,(u) = v + f\,(u)$ und $u = (t_w \circ f)\,(u) = w + f\,(u)$,
also $v = u - f\,(u) = w$.

(4) Es seien f linear und $s = t_u \circ f$. Nach (2) ist $f \circ f = Id_V$.
Daher ist $s \circ s = t_u \circ f \circ t_u \circ f = t_{u+f(u)}$, somit ist $s \circ s$ eine Translation.
Wegen $\emptyset \neq Fix\,(s) \subseteq Fix\,(s \circ s)$ muss $s \circ s = Id_V$ sein.

Satz 129: *Zu jeder Hyperebene T von V gibt es genau eine Spiegelung s mit $Fix(s) = T$, und zwar*

$$s : V \to V \quad , \quad v \longmapsto 2 \cdot p_T\,(v) - v\ .$$

Dabei ist p_T die orthogonale Projektion von V auf T.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass s eine Isometrie ist. Die Eindeutigkeit folgt aus Aussage (3) in Satz 128.
Es seien $x \in T$, U der parallele Untervektorraum von T und $y := x - p_U\,(x)$. Dann ist $p_T = t_y \circ p_U$ und $s = 2t_y \circ p_U - Id_V = t_{2y} \circ (2p_U - Id_V)$. Daher genügt es zu zeigen, dass $2p_U - Id_V$ orthogonal ist.

Für alle $v \in V$ ist

$$\begin{aligned}(2p_U - Id_V)\,(v) &= p_U\,(v) - (v - p_U\,(v))\,,\\ v &= p_U\,(v) + (v - p_U\,(v))\end{aligned}$$

und $p_U\,(v) \in U,\ (v - p_U\,(v)) \in U^{\perp}$.
Für alle $v, w \in V$ ist daher

$$\begin{aligned}\langle (2p_U - Id_V)\,(v)\,, (2p_U - Id_V)\,(w)\rangle &=\\ \langle p_U\,(v) - (v - p_U\,(v))\,, p_U\,(w) - (w - p_U\,(w))\rangle &=\\ \langle p_U\,(v)\,, p_U\,(w)\rangle + \langle v - p_U\,(v)\,, w - p_U\,(w)\rangle &=\\ \langle p_U\,(v) + (v - p_U\,(v))\,, p_U\,(w) + (w - p_U\,(w))\rangle &= \langle v, w\rangle\ .\end{aligned}$$

Satz 130: *Jede orthogonale Funktion von V nach V ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.*

Beweis: Induktion nach n.

Wenn $n = 1$ ist, dann gibt es nur zwei orthogonale Funktionen, nämlich Id_V und die Spiegelung $-\mathrm{Id}_V$. Die erste ist das Produkt von 0 Spiegelungen, die zweite von einer Spiegelung.

Sei nun $n > 1$ und $f \neq \mathrm{Id}_V$ eine orthogonale Funktion. Dann gibt es einen Vektor v in V mit $f\,(v) \neq v$.

Es seien $W := \mathbb{R}\,(f\,(v) - v)^{\perp}$ und $U := (\mathbb{R}\,v)^{\perp}$, sowie s_W die Spiegelung mit $Fix\,(s_W) = W$.

Wegen $f(v) = \frac{1}{2}(f(v) - v) + \frac{1}{2}(f(v) + v) \in W^{\perp} \oplus W$ ist $p_W(f(v)) = \frac{1}{2}(f(v) + v)$ und $s_W(f(v)) = 2p_W(f(v)) - f(v) = v$.

Daher sind $\mathbb{R}v$ und U stabil unter der orthogonalen Funktion $s_W \circ f$.

Nach Induktionsannahme gibt es höchstens $n-1$ Spiegelungen $s_1, \ldots, s_k$ in U so, dass $(s_W \circ f)\,|_U = s_1 \circ \ldots \circ s_k$.

Wir setzen für $1 \leq i \leq k$ die Spiegelungen s_i durch $s_i(v) := v$ zu Spiegelungen in V fort und bezeichnen diese wieder mit s_i. Dann ist $s_W \circ f = s_1 \circ \ldots \circ s_k$ und $f = s_W \circ s_1 \circ \ldots \circ s_k$.

Definition 131 : Es seien s eine Spiegelung in V und $0 \neq u$ ein Element des parallelen Untervektorraums W von $Fix(s)$.
Dann heißt $t_u \circ s$ *Gleitspiegelung* (um die Hyperebene $Fix(s)$).

Satz 132 : *Es sei f eine Isometrie, deren linearer Anteil g eine Spiegelung ist. Dann gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in Fix(g)$ und $v \in Fix(g)^{\perp}$ so, dass $u + v = f(0)$ ist. Es gilt:*

(1) *Wenn $u = 0$ ist, dann ist f eine Spiegelung um $\frac{1}{2}v + Fix(g)$.*
(2) *Wenn $u \neq 0$ ist, dann ist $f = t_u \circ (t_v \circ g)$ eine Gleitspiegelung um die Hyperebene $\frac{1}{2}v + Fix(g)$ und $Fix(f)$ ist leer.*

Beweis:

(1) Es sei $x \in Fix(g)$. Wegen $g(v) = -v$ ist
$$(t_v \circ g)\left(\frac{1}{2}v + x\right) = v + \frac{1}{2}g(v) + x = \frac{1}{2}v + x.$$
Daher ist die Hyperebene $\frac{1}{2}v + Fix(g)$ in $Fix(t_v \circ g)$ enthalten.
Wenn $v = 0$ ist, dann ist $t_v \circ g = g \neq \mathrm{Id}_V$.
Wenn $v \neq 0$ ist, dann ist $(t_v \circ g)(v) = v - v = 0$ und daher $t_v \circ g \neq \mathrm{Id}_V$.
Daher ist $Fix(t_v \circ g) \neq V$ und $Fix(t_v \circ g) = \frac{1}{2}v + Fix(g)$.
(2) Sei $u \neq 0$. Nach (1) ist nur noch zu zeigen, dass $Fix(f)$ leer ist. Sei $s := t_v \circ g$. Wäre $x \in Fix(f)$, dann wäre $f(f(x)) = f(x) = x$. Daher ist $x = (t_u \circ s)((t_u \circ s)(x)) = u + s(u + s(x)) =$
$= u + v + g(u + v + g(x)) = u + v + u - v + x = 2u + x$, also $u = 0$, Widerspruch zu $u \neq 0$.

§4. Isometrien der Ebene

In diesem Abschnitt sei V ein zweidimensionaler orientierter euklidischer Raum.

Wir werden die folgenden Eigenschaften der Funktionen Sinus und Cosinus verwenden:

Hilfssatz 133:

(1) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha),$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)\ .$$

„Sinus und Cosinus sind 2π*-periodische Funktionen, Sinus ist eine ungerade und Cosinus eine gerade Funktion".*

(2) *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\ .$$

(3)

$$\sin(0) = 0\ , \qquad \cos(0) = 1\ , \qquad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1\ ,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0\ , \qquad \sin(\pi) = 0\ , \qquad \cos(\pi) = -1\ .$$

Beweis: Siehe Analysis 1.

Satz 134: *Es seien* $\underline{u} = (u_1, u_2)$ *eine positiv orientierte ON-Basis von* V *und*

$$(-)^{\perp} : V \longrightarrow V \quad , \quad v \longmapsto v^{\perp}\ ,$$

die durch $u_1^{\perp} := u_2$ *und* $u_2^{\perp} := -u_1$ *definierte lineare Funktion.*

(1) *Die Funktion* $(-)^{\perp}$ *ist orthogonal.*

(2) *Für alle Vektoren* $v \in V$ *mit* $\|v\| = 1$ *ist* $v^{\perp}$ *der einzige Vektor mit der Eigenschaft, dass* $(v, v^{\perp})$ *eine positiv orientierte ON-Basis von* V *ist.*

(3) *Für alle Vektoren* $v, w \in V$ *mit* $\|v\| = 1 = \|w\|$ *gibt es genau eine Zahl* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *so, dass*

$$w = \cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^{\perp}$$

ist. Wenn $\alpha \in [0, \pi]$ *bzw.* $\alpha \in [\pi, 2\pi[$*, dann ist* α *bzw.* $2\pi - \alpha$ *der Winkel zwischen* v *und* w*.*

Beweis:

(1) Die Matrix von $(-)^{\perp}$ bezüglich $\underline{u}$ ist die orthogonale Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Sei $v = au_1 + bu_2$. Dann ist $v^{\perp} = -bu_1 + au_2$, also
$$(v, v^{\perp}) = \underline{u} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$
Wegen $\|v\| = 1$ ist $a^2 + b^2 = 1$. Somit ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix mit Determinante 1 und $(v, v^{\perp})$ ist eine positiv orientierte ON-Basis.
Sei $w = cu_1 + du_2$ so, dass (v, w) eine positiv orientierte ON-Basis von V ist. Aus $\langle v, w\rangle = 0$ folgt $(c, d) \in \mathbb{R}(-b, a)$, wegen $\|w\| = 1$ ist dann $(c, d) = (-b, a)$ oder $(c, d) = (b, -a)$. Weil (v, w) positiv orientiert ist, muss $(c, d) = (-b, a)$ sein.

(3) Sei β der Winkel zwischen v und w. Dann ist
$$w = \langle v, w\rangle v + \langle v^{\perp}, w\rangle v^{\perp} = \cos(\beta)v + \langle v^{\perp}, w\rangle v^{\perp}$$
und
$$\cos^2(\beta) + \langle v^{\perp}, w\rangle^2 = \|w\|^2 = 1 .$$
Wenn $\langle v^{\perp}, w\rangle \geq 0$ ist, dann ist $\langle v^{\perp}, w\rangle = \sin(\beta)$ und $\alpha := \beta$.
Wenn $\langle v^{\perp}, w\rangle \leq 0$ ist, dann ist $\langle v^{\perp}, w\rangle = -\sin(\beta)$ und
$\alpha := 2\pi - \beta$.

Definition 135 : Es seien $u, v, w \in V$, $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Die eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit
$$\|w\|^{-1}w = \cos(\alpha)\|v\|^{-1}v + \sin(\alpha)\|v\|^{-1}v^{\perp}$$
heißt *orientierter Winkel von der Halbgeraden* $u + \mathbb{R}_{\geq 0}v$ *nach* $u + \mathbb{R}_{\geq 0}w$ oder kurz *orientierter Winkel von v nach w*.

Satz 136 : *Es seien* $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ *und* α *der orientierte Winkel von v nach w. Dann ist* $2\pi - \alpha$ *der orientierte Winkel von w nach v.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $\|v\| = 1 = \|w\|$ ist. Dann ist
$$w = \cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^{\perp}$$
und
$$w^{\perp} = \cos(\alpha)v^{\perp} + \sin(\alpha)v^{\perp\perp} = \cos(\alpha)v^{\perp} - \sin(\alpha)v .$$
Daher ist
$$v = \cos(\alpha)w - \sin(\alpha)w^{\perp} = \cos(2\pi - \alpha)w + \sin(2\pi - \alpha)w^{\perp} .$$

Definition 137 : Es seien $\alpha \in [0, 2\pi[$, $z \in V$ und $(-)^\perp$ die in Satz 134 definierte Funktion. Dann heißt die Funktion

$$d_\alpha : V \longrightarrow V \quad , \quad v \longmapsto \cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^\perp \ ,$$

Drehung in V um 0 mit *Drehwinkel* α.
Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ ist dann α der orientierte Winkel von v nach $d_\alpha(v)$.

Die Funktion

$$d_{z,\alpha} : V \longrightarrow V \quad , \quad x \longmapsto z + d_\alpha(x - z) \ ,$$

heißt *Drehung* (in V) um den *Drehpunkt* z mit *Drehwinkel* α.
Es ist $d_{0,\alpha} = d_\alpha$.

Satz 138 :

(1) *Für alle* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *ist die Funktion* d_α *linear. Ihre Matrix bezüglich jeder positiv orientierten ON-Basis von* V *ist*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt Drehmatrix zum Winkel α.
Insbesondere ist d_α *orthogonal und* $\det(d_\alpha) = 1$.

(2) *Jede orthogonale Funktion von* V *nach* V *mit Determinante* 1 *ist eine Drehung um* 0.

(3) *Für alle* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *und* $z \in V$ *ist*

$$d_{z,\alpha} = t_{z - d_\alpha(z)} \circ d_\alpha.$$

Jede Drehung ist eine Isometrie.

Beweis: Es sei $\underline{u} = (u_1, u_2)$ eine positiv orientierte *ON*- Basis von V.

(1) Wegen $d_\alpha = \cos(\alpha)\mathrm{Id}_V + \sin(\alpha)(-)^\perp$ ist d_α linear.
Nach Satz 134, (2), ist $u_1^\perp = u_2$ und $u_2^\perp = -u_1$, also ist

$$d_\alpha(u_1) = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)u_2$$

und

$$d_\alpha(u_2) = \cos(\alpha)u_2 - \sin(\alpha)u_1.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

die Matrix von d_α bezüglich $\underline{u}$.
Diese Matrix ist orthogonal und ihre Determinante ist 1.

(2) Es seien $f : V \longrightarrow V$ eine orthogonale Funktion mit $\det(f) = 1$ und α der orientierte Winkel von u_1 nach $f(u_1)$. Dann ist $f(u_1) = d_\alpha(u_1)$. Weil $(f(u_1), f(u_2))$ eine positiv orientierte ON-Basis von V ist, muss

$f(u_2) = f(u_1)^\perp$ sein (Satz 134, (2)). Also ist auch $f(u_2) = d_\alpha(u_2)$, somit $f = d_\alpha$.

(3) Nach (1) ist d_α linear und orthogonal, daher ist für alle $x \in V$

$$d_{z,\alpha}(x) = z + d_\alpha(x) - d_\alpha(z) = t_{z-d_\alpha(z)}(d_\alpha(x))$$

und $d_{z,\alpha} = t_{z-d_\alpha(z)} \circ d_\alpha$ eine Isometrie.

Definition 139 : Es seien W ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f : W \longrightarrow W$ eine affine Funktion. Dann heißt f *orientierungserhaltend* bzw. *orientierungsumkehrend*, wenn die Determinante des linearen Anteils von f eine positive bzw. negative Zahl ist.

Beispiel 140 : Drehungen in V sind orientierungserhaltend, Spiegelungen in V sind orientierungsumkehrend.

Satz 141 : *Es sei f eine Isometrie von V.*
Wenn $Fix(f)$ eine Gerade ist, dann ist f eine Spiegelung.
Wenn $Fix(f)$ ein Punkt ist, dann ist f eine Drehung um diesen.
Wenn $Fix(f)$ leer und f orientierungserhaltend ist, dann ist f eine Translation.
Wenn $Fix(f)$ leer und f orientierungsumkehrend ist, dann ist f eine Gleitspiegelung.

Beweis: Sei $u := f(0)$ und g der lineare Anteil von f. Nach Hilfssatz 125 ist $Fix(f)$ entweder leer oder ein affiner Unterraum mit parallelem Vektorraum $Fix(g)$.
Nach Satz 138, (2), und nach Satz 130 ist g eine Drehung, wenn g orientierungserhaltend ist, und eine Spiegelung, wenn g orientierungsumkehrend ist.

Wenn $Fix(f)$ eine Gerade ist, dann ist f wegen $dim_\mathbb{R}(V) = 2$ eine Spiegelung.

Wenn $Fix(f) = \{z\}$ ein Punkt ist, ist auch $Fix(g)$ ein Punkt. Dann ist g eine Drehung um 0 und nicht Id_V. Weiters ist $z = f(z) = u + g(z)$. Daher ist für alle $x \in V$

$$f(x) = u + g(x) = z - g(z) + g(x) = z + g(x - z),$$

somit ist f eine Drehung um z mit demselben Drehwinkel wie g.

Wenn $Fix(f)$ leer ist, liegt u nicht im Bild von $\mathrm{Id}_V - g$. Daher ist

$$k := \dim_\mathbb{R}(\mathrm{Kern}(Id_V - g)) = 2 - \dim_\mathbb{R}(\mathrm{Bild}(Id_V - g)) \geq 1.$$

Wenn $k = 2$ ist, dann ist $g = \mathrm{Id}_V$ und f eine Translation.
Wenn $k = 1$ ist, dann ist g eine Spiegelung und f eine Gleitspiegelung.

Satz 142 : *Für $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ mit $\alpha+\beta \geq 2\pi$ sei $d_{\alpha+\beta} := d_{\alpha+\beta-2\pi}$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$:*

$$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}.$$

Insbesondere ist $d_\alpha^{-1} = d_{2\pi-\alpha}$ und $d_\alpha \circ d_\beta = d_\beta \circ d_\alpha$.

Beweis: Die Matrizen von d_α, d_β bezüglich einer positiv orientierten *ON*-Basis von V sind

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

die Matrix von $d_\alpha \circ d_\beta$.

Beispiel 143 : Es seien $v, w \in V \backslash \{0\}$, α der orientierte Winkel von v nach w und s_v, s_w die Spiegelungen mit $Fix(s_v) = \mathbb{R}v$, $Fix(s_w) = \mathbb{R}w$. O.E.d.A. nehmen wir $\|v\| = \|w\| = 1$ an. Wir berechnen $s_v \circ s_w$. Da $s_v \circ s_w$ linear ist und $\det(s_v \circ s_w) = \det(s_v)\det(s_w) = (-1)^2 = 1$, ist $s_v \circ s_w$ eine Drehung d_β um 0.
Sei $v^\perp \in V$ so, dass $(v, v^\perp)$ eine positiv orientierte ON-Basis ist. Dann ist

$$d_\beta(d_\alpha(v)) = d_\beta(w) = (s_v \circ s_w)(w) = s_v(w) =$$

$$= 2\langle v, w\rangle v - w = 2\cos(\alpha)v - \left(\cos(\alpha)v + \sin(\alpha)v^\perp\right) =$$

$$= \cos(2\pi-\alpha)v + \sin(2\pi-\alpha)v^\perp = d_{2\pi-\alpha}(v) = d_\alpha^{-1}(v).$$

Daher ist $d_\beta \circ d_\alpha = d_\alpha^{-1}$, $s_v \circ s_w = d_\beta = d_{2\alpha}^{-1}$ und $s_w \circ s_v = (s_v \circ s_w)^{-1} = d_{2\alpha}$.

Beispiel 144 : Wir betrachten $\mathbb{C}$ als 2-dimensionalen, durch die Basis $(1, i)$ orientierten euklidischen Raum.
Für $y, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ seien α, β die orientierten Winkel von 1 nach y, z. Wir schreiben $e^{i\alpha}$ für $d_\alpha(1) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.
Dann ist $y = |y|\, e^{i\alpha}$, $z = |z|\, e^{i\beta}$ („Polardarstellung von komplexen Zahlen“) und $y \cdot z = |y| \cdot |z| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$.
(„Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.“)

Beispiel 145 : Die Punkte $u, v, w \in V$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks. Die orientierten Winkel von $v-u$ bzw. $w-v$ bzw. $u-w$ nach $w-u$ bzw. $u-$

v bzw. $v-w$ seien α bzw. β bzw. γ. Wir können annehmen, dass $\alpha,\beta,\gamma \in [0,\pi[$ ist .
Dann ist

$$d_{\alpha+\beta+\gamma}(\|u-w\|^{-1}(u-w)) = (d_\alpha \circ d_\beta \circ d_\gamma)(\|u-w\|^{-1}(u-w)) =$$

$$= d_\alpha(d_\beta(\|v-w\|^{-1}(v-w)) = -d_\alpha(d_\beta(\|w-v\|^{-1}(w-v)) =$$

$$= -d_\alpha(\|u-v\|^{-1}(u-v)) = d_\alpha(\|v-u\|^{-1}(v-u)) =$$

$$= -\|u-w\|^{-1}(u-w) = d_\pi(\|u-w\|^{-1}(u-w))$$

und $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.
(„Die Winkelsumme im Dreieck ist π.“)

Beispiel 146 : Wir betrachten in der Ebene, die wir nach Wahl eines Nullpunktes und einer Basis mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, zwei drehbare Scheiben. Die erste ist um den Punkt $(0,0)$ drehbar, die zweite ist auf der ersten im Punkt (a,b) montiert. Die zweite Scheibe wird um den Winkel β, die erste um den Winkel α gedreht.
Dann wird der Punkt (x,y) auf der zweiten Scheibe in den Punkt

$$d_\alpha(d_{(a,b),\beta}(x,y)) = d_\alpha(a,b) + d_{\alpha+\beta}(x-a,y-b) =$$

$$= (a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha), a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha)) + ((x-a)\cos(\alpha+\beta) -$$

$$-(y-b)\sin(\alpha+\beta), (x-a)\sin(\alpha+\beta) + (y-b)\cos(\alpha+\beta))$$

bewegt.

§5. Zeigerrechnung

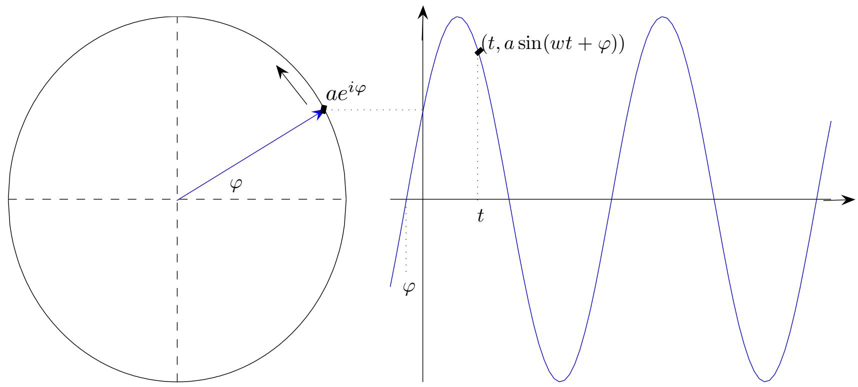
Ein Zeiger (zum Beispiel der Sekundenzeiger einer Uhr) der Länge a dreht sich in einer Ebene mit der Kreisfrequenz ω um einen Punkt $\mathcal{O}$. Wir identifizieren diese Ebene mit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{O}$ mit $0_\mathbb{C} = (0,0)$. Zur Zeit 0 sei die Spitze des Zeigers im Punkt $ae^{i\varphi} = (a\cos(\varphi), a\sin(\varphi))$. Zur Zeit t befindet sie sich dann im Punkt

$$ae^{i(\omega t+\varphi)} = (a\cos(\omega t+\varphi), a\sin(\omega t+\varphi)).$$

Die Funktion, die der Zeit t den Abstand der Zeigerspitze von der reellen Geraden $\mathbb{R}(1,0)$ zuordnet, ist daher

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a\sin(\omega t+\varphi) \end{array} .$$

Diese Funktion beschreibt eine *harmonische Schwingung* mit *Kreisfrequenz* ω, *Amplitude* a und *Anfangsphase* φ.



Drehen sich zwei Zeiger mit derselben Kreisfrequenz ω um denselben Punkt, aber mit eventuell verschiedenen Längen a_1, a_2 und Anfangsphasen φ_1, φ_2, dann heißt $\varphi_1 - \varphi_2$ die *Phasendifferenz* der entsprechenden harmonischen Schwingung. Der Abstand der Summe

$$ae^{i(\omega t+\varphi)} := a_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

der Zeigerspitzen von der reellen Geraden $\mathbb{R}(1,0)$ ist die Summe der Abstände der zwei Zeigerspitzen von dieser Geraden, also

$$a\sin(\omega t+\varphi) = a_1 \sin(\omega t+\varphi_1) + a_2 \sin(\omega t+\varphi_2)\,.$$

Die Summe von zwei harmonischen Schwingungen mit derselben Kreisfrequenz ist daher wieder eine harmonische Schwingung, ihre Amplitude bzw. Anfangsphase ist a bzw. φ. Um diese zu berechnen, muss die *Polardarstellung* $ae^{i(\omega t+\varphi)}$ der Summe der zwei komplexen Zahlen, die den zwei Zeigerspitzen entsprechen, berechnet werden.

Diese Überlegungen führen zur *Zeigerrechnung*, mit der die folgende Aufgabe gelöst wird:
Es seien n eine positive ganze Zahl und $\omega, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Gesucht sind reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \sin(\omega t+\varphi_\ell) = a\sin(\omega t+\varphi)$$

ist.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die komplexen Zahlen

$$z_\ell(t) := a_\ell e^{i(\omega t+\varphi_\ell)} := a_\ell(\cos(\omega t+\varphi_\ell) + i\sin(\omega t+\varphi_\ell)),\; 1 \leq \ell \leq n.$$

Dann ist $a_\ell \sin(\omega t+\varphi_\ell)$ der Imaginärteil von $z_\ell(t)$ und $\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \sin(\omega t+\varphi_\ell)$ der Imaginärteil von

$$z(t) := \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell(t).$$

Es ist

$$z(t) = \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell(t) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell e^{i(\omega t+\varphi_\ell)} = e^{i\omega t} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell e^{i\varphi_\ell} = e^{i\omega t} z(0)\,.$$

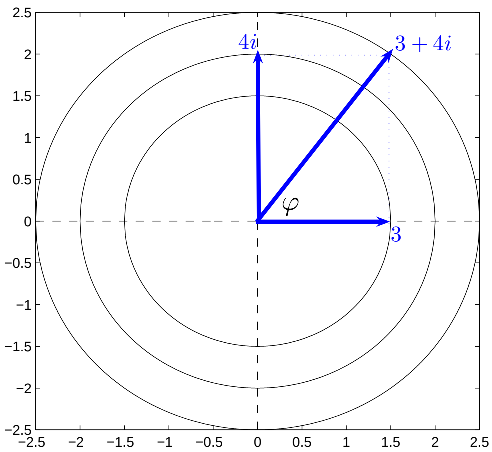
Wir erhalten daher die gesuchten Zahlen a und φ aus der Polardarstellung $z(0) = a(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = ae^{i\varphi}$ von $z(0)$, dabei ist a der Abstand zwischen $z(0)$ und 0 und φ der orientierte Winkel von $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot z(0)$.

Beispiel 147 : Berechne reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(\omega t) + 4 \cdot \cos(\omega t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ist.
Wegen $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ist $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Weiters sind
$z_1(t) = 3(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$, $z_2(t) = 4(\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}))$ und $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, also $z(0) = 3 + 4i$.
Der Abstand zwischen $z(0)$ und 0 ist $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, der Tangens des orientierten Winkels von $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (3 + 4i)$ ist $\frac{4}{3}$. Daher ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$3 \cdot \sin(\omega t) + 4 \cdot \cos(\omega t) = 5 \cdot \sin(\omega t + \arctan(\frac{4}{3}))\,.$$



Beispiel 148 : Berechne reelle Zahlen a und φ so, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$

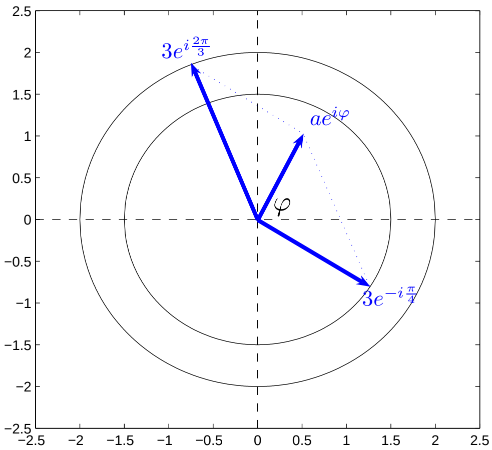
$$3 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + 4 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

ist.
Es ist $z_1(0) = 3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, $z_2(0) = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$ und

$z(0) = z_1(0) + z_2(0)$, also

$$z(0) = 3\cos(-\frac{\pi}{4}) + 4\cos(\frac{2\pi}{3}) + i(3\sin(-\frac{\pi}{4}) + 4\sin(\frac{2\pi}{3}))\,.$$

Somit ist $z(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 - i(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3})$ und $a \approx 1.34825$, $\varphi \approx 1.48069$.



§6. Isometrien des Raumes

In diesem Abschnitt sei V ein dreidimensionaler orientierter euklidischer Raum.

Definition 149 : Eine orientierungserhaltende Isometrie von V heißt *(eigentliche) Bewegung* in V.

Definition 150 : Es seien E ein zweidimensionaler orientierter Untervektorraum von V, $z \in E$ und d eine Drehung um z in E. Für alle $v \in V$ schreiben wir v_1 bzw. v_2 für die orthogonale Projektion von v auf E bzw. $E^\perp$. Die Funktion

$$f : V \to V \quad , \quad v = v_1 + v_2 \longmapsto d\,(v_1) + v_2\,,$$

heißt *Drehung (in V)* um die *Drehachse* $z + E^\perp$ und mit *Drehebene* E.
Sei $0 \neq u \in E^\perp$ und $f \neq \mathrm{Id}_V$. Dann heißt die Funktion $t_u \circ f$ *Schraubung* um die Drehachse $z + E^\perp$.
Sei s eine Spiegelung in V, deren Fixmenge zu E parallel ist. Dann heißt die Funktion $s \circ f$ *Drehspiegelung* um die Drehachse $z + E^\perp$ und mit Spiegelungsebene $Fix\,(s)$.
Der Drehwinkel von d wird auch *Drehwinkel von f bzw. $t_u \circ f$ bzw. $s \circ f$* genannt.

Satz 151 :

(1) *Drehungen, Schraubungen und Drehspiegelungen sind Isometrien.*
(2) *Die Fixmenge einer Drehung* $\neq \mathrm{Id}_V$ *ist ihre Drehachse. Die Fixmenge einer Schraubung ist leer.*
(3) *Sei* g *eine Drehung mit* $g(0) = 0$*. Ist* $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *eine ON-Basis von* V *so, dass* (v_1, v_2) *eine ON-Basis der Drehebene* E *von* g *ist, dann ist*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix von g *bezüglich* $\underline{v}$*. Dabei ist* α *der Drehwinkel von* $g|_E$ *bezüglich der durch* (v_1, v_2) *gegebenen Orientierung von* E*. Insbesondere ist* $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathrm{spur}(g) - 1)$.
(4) *Drehungen und Schraubungen sind orientierungserhaltend, Drehspiegelungen sind orientierungsumkehrend.*

Beweis:

(1) Es seien f eine Drehung mit Drehebene E und $d := f|_E$. Für $v, w \in V$ ist $d(v_1) - d(w_1) \in E$ und $v_2 - w_2 \in E^\perp$. Daher ist

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\|^2 &= \|d(v_1) - d(w_1) + v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|d(v_1) - d(w_1)\|^2 + \|v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|v_1 - w_1\|^2 + \|v_2 - w_2\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 . \end{aligned}$$

Somit ist f eine Isometrie.
(2) nachprüfen.
(3) Wegen (1) und $g(0) = 0$ folgt aus Satz 112 , dass g linear ist. Die Behauptung folgt daher aus Satz 138 .
(4) Folgt aus (3).

Satz 152 :

(1) *Jede Bewegung in* V *ist eine Drehung, eine Schraubung oder eine Translation.*
(2) *Jede orientierungsumkehrende Isometrie in* V *ist eine Spiegelung, Gleitspiegelung oder Drehspiegelung.*

Beweis: Es sei $g : V \to V$ eine orthogonale Funktion. Nach Satz 122 gibt es einen 1-dimensionalen, unter g stabilen Untervektorraum W von V. Aus Satz 116 folgt, dass $g|_W = \mathrm{Id}_W$ oder $g|_W = -\mathrm{Id}_W$.

Nach Satz 118 ist auch $W^{\perp}$ stabil unter g. Nach Satz 141 ist die Einschränkung von g auf $W^{\perp}$ eine Drehung oder eine Spiegelung. Es ist
$\det(g) = \det(g\,|_W) \cdot \det(g\,|_{W^{\perp}})$.

(1) Sei $\det(g) = 1$. Dann ist entweder
$g\,|_W = \mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$ eine Drehung oder
$g\,|_W = -\mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$eine Spiegelung.
Im ersten Fall ist g eine Drehung um die Drehachse W, im zweiten die Drehung um die Drehachse $Fix(g\,|_{W^{\perp}})$ mit
Drehwinkel π.
Sei $u \in Fix(g)$ und $v \in Fix(g)^{\perp}$. Die Bewegung $t_{u+v} \circ g$ ist
eine Translation, wenn $g = \mathrm{Id}_V$,
eine Drehung, wenn $u = 0$,
und eine Schraubung, wenn $u \neq 0$ und $g \neq \mathrm{Id}_V$.

(2) Sei $\det(g) = -1$. Dann ist entweder
$g\,|_W = \mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$eine Spiegelung oder
$g\,|_W = -\mathrm{Id}_V$ und $g\,|_{W^{\perp}}$ eine Drehung.
Im ersten Fall ist g die Spiegelung um $W \oplus Fix(g\,|_{W^{\perp}})$, im zweiten Fall ist g eine Drehspiegelung mit Drehachse W. Das Zusammensetzen von g mit einer Translation ergibt nach Satz 132 eine Spiegelung, Gleitspiegelung oder Drehspiegelung.

Beispiel 153 : Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad (a,b,c) \longmapsto (c,a,b) \ ,$$

ist eine Isometrie, wegen $f(0) = 0$ sogar orthogonal.
Es ist $\det(f) = 1$, $\mathrm{spur}(f) = 0$ und der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 ist $\mathbb{R}(1,1,1)$.
Daher ist f eine Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}(1,1,1)$ mit Drehwinkel α, wobei $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 154 : Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad (a,b,c) \longmapsto (-b,a,-c) \ ,$$

ist eine Isometrie, wegen $f(0) = 0$ sogar orthogonal.
Es ist $\det(f) = -1$, $\mathrm{spur}(f) = -1$ und der Eigenraum von f zum Eigenwert -1 ist $\mathbb{R}(0,0,1)$.
Daher ist f eine Drehspiegelung um die Drehachse $\mathbb{R}(0,0,1)$
mit Drehwinkel α, wobei $\cos(\alpha) = 0$.

Satz 155 : *Es seien $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ eine ON-Basis von V und f eine Bewegung in V mit $f(0) = 0$. Dann gibt es Drehungen g_α, g_γ mit Drehachse $\mathbb{R}v_1$ und Drehwinkeln $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi[$ und eine Drehung h_β mit Drehachse $\mathbb{R}v_3$*

und Drehwinkel $\beta \in [0,\pi]$ *so, dass*

$$f = g_\alpha \circ h_\beta \circ g_\gamma$$

ist. Die Zahlen α,β,γ *heißen* Euler-Winkel *von* f.
Für Matrizen bedeutet dieser Satz: Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *mit* $\det(A) = 1$ *kann als Produkt*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei $\alpha,\gamma \in [0,2\pi[$ *und* $\beta \in [0,\pi]$ *sind.*

Beweis: Sei $w := f^{-1}(v_1) \in V$. Sei g_γ eine Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}v_1$ so, dass $g_\gamma(w) \in (\mathbb{R}v_3)^\perp$. Dann gibt es eine Drehung h_β mit Drehachse $\mathbb{R}v_3$ und Drehwinkel $\beta \in [0,\pi]$ so, dass $h_\beta\left(g_\gamma(w)\right) = v_1$. Die Funktion $h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1}$ ist eine Drehung, wegen $\left(h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1}\right)(v_1) = v_1$ ist ihre Drehachse $\mathbb{R}v_1$. Setze $g_\alpha := \left(h_\beta \circ g_\gamma \circ f^{-1}\right)^{-1}$.

§7. Symmetriegruppen

Definition 156: Es seien $M_1,...,M_k$ Teilmengen von V. Dann heißt die Menge $Sym_V(M_1,...,M_k) :=$

$$= \{f : V \to V \mid f \text{ Isometrie}, f(M_i) = M_i, i = 1,...,k\}$$

Symmetriegruppe von $M_1,...,M_k$. Ihre Elemente heißen *Symmetrieoperationen* von $M_1,...,M_k$.

Satz 157:

(1) *Die Symmetriegruppe von* $M_1,...,M_k$ *ist mit der Zusammensetzung von Funktionen eine Gruppe.*
(2) *Ist eine der Mengen* $M_1,...,M_k$ *endlich, dann ist ihr Schwerpunkt ein Fixpunkt für alle Symmetrieoperationen von* $M_1,...,M_k$.

Beweis:

(1) kann leicht nachgeprüft werden.
(2) Sei M_1 endlich. Nach Satz 51 ist für jede Symmetrieoperation f das Bild des Schwerpunktes von M_1 der Schwerpunkt des Bildes $f(M_1) = M_1$.

Satz 158: *Es seien $M_1,...,M_k$ Teilmengen von V. M_1 sei eine endliche, nicht-leere Menge, deren affine Hülle eine Hyperebene in V oder gleich V ist. Dann ist $Sym_V(M_1,...,M_k)$ eine endliche Menge.*
Diese kann wie folgt berechnet werden:
Sei z der Schwerpunkt von M_1 und W die affine Hülle von M_1.

Fall *1: $z = 0$. Dann ist W ein Untervektorraum von V.*
Wähle eine Basis $(v_1,...,v_n)$ von W aus Elementen von M_1. Wenn $V \neq W$, ergänze diese durch ein Element $v_{n+1} \in W^\perp$ zu einer Basis von V.
$Sym_V(M_1,...,M_k)$ ist dann in der endlichen Menge
$\{g \in \mathrm{GL}_\mathbb{R}(V) \mid g(v_i) \in M_1, 1 \leq i \leq n, g(v_{n+1}) \in \{v_{n+1}, -v_{n+1}\}\}$
enthalten.
Wähle aus dieser die Elemente von $Sym_V(M_1,...,M_k)$ aus.

Fall *2: $z \neq 0$.*
Dann ist 0 der Schwerpunkt von $t_{-z}(M_1)$.
Berechne $Sym_V(t_{-z}(M_1),...,t_{-z}(M_k))$ wie in Fall 1. Dann ist
$Sym_V(M_1,...,M_k) = t_z \circ Sym_V(t_{-z}(M_1),...,t_{-z}(M_k)) \circ t_{-z}$.

Beweis: Übung.

Beispiel 159: Wir stellen das Wassermolekül H_2O durch zwei Teilmengen $M_1 = \{O\}, M_2 = \{H, H'\}$ eines 3-dimensionalen euklidischen Raumes V dar. Der Winkel zwischen H und H' liegt in $]0,\pi[$.
Die Symmetriegruppe dieses Moleküls ist $Sym_V(M_1,M_2)$.
Es seien T die affine Hülle von O,H,H' und G die Gerade durch O und $\frac{1}{2}(H+H')$. Dann ist $Sym_V(M_1,M_2) =$

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{Id}_V,\ \text{Drehung um die Drehachse } G \text{ mit Drehwinkel } \pi, \\ \text{Spiegelung um } T,\ \text{Spiegelung um die Ebene } O+(H-H')^\perp \end{array}\right\}.$$

§8. Normale und selbstadjungierte Funktionen

Es seien K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, V ein euklidischer oder unitärer Raum und $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_n)$ eine ON-Basis von V.

Definition 160: Es seien f und g lineare Funktionen von V nach V. Die Funktion g heißt zu f *adjungiert*, wenn für alle $u,w \in V$

$$\langle f(u), w\rangle = \langle u, g(w)\rangle$$

ist.

Beispiel 161: Für $c \in \mathbb{C}$ ist $\overline{c}\cdot\mathrm{Id}_V$ zu $c\cdot\mathrm{Id}_V$ adjungiert.

Satz 162 : *Es seien f, g lineare Funktionen von V nach V und A, B ihre Matrizen bezüglich $\underline{v}$. Dann ist g genau dann zu f adjungiert, wenn*

$$B = \overline{A}^{\top}$$

ist. Insbesondere gibt es genau eine zu f adjungierte Funktion, wir bezeichnen sie mit f^*, und es ist $(f^*)^* = f$.

Beweis: Man prüft leicht nach, dass g genau dann zu f adjungiert ist, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$

$$\langle f(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, g(v_j) \rangle$$

ist. Wegen

$$\langle f(v_i), v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} v_k, v_j \rangle = \overline{A_{ji}} = (\overline{A}^{\top})_{ij}$$

und

$$\langle v_i, g(v_j) \rangle = \langle v_i, \sum_{k=1}^{n} B_{kj} v_k \rangle = B_{ij}$$

folgt daraus die Behauptung.

Definition 163 : Eine lineare Funktion f von V nach V heißt *normal* bzw. *selbstadjungiert*, wenn

$$f \circ f^* = f^* \circ f \qquad \text{bzw.} \qquad f = f^*$$

ist. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *symmetrisch* bzw. *normal* bzw. *selbstadjungiert*, wenn

$$A = A^{\top} \qquad \text{bzw.} \qquad A \cdot \overline{A}^{\top} = \overline{A}^{\top} \cdot A \qquad \text{bzw.} \qquad A = \overline{A}^{\top}$$

ist.

Eine reelle Matrix ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie symmetrisch ist. Nach Satz 162 ist eine lineare Funktion genau dann normal bzw. selbstadjungiert, wenn ihre Matrix bezüglich einer ON-Basis von V normal bzw. selbstadjungiert ist.

Beispiel 164 : Jede orthogonale Funktion von V nach V ist normal.
Spiegelungen und orthogonale Projektionen auf Untervektorräume von V sind selbstadjungiert.
Diagonalmatrizen sind genau dann selbstadjungiert, wenn sie reell sind.

Hilfssatz 165: *Es seien f und g lineare Funktionen von V nach V und $c \in K$. Dann ist $(f+cg)^* = f^* + \overline{c}g^*$. Wenn f und g selbstadjungiert sind und c eine reelle Zahl ist, dann ist auch $f+cg$ selbstadjungiert.*

Beweis: Übung

Hilfssatz 166: *Es seien f und g vertauschbare lineare Funktionen von V nach V. Dann ist jeder Eigenraum von f unter g stabil.*

Beweis: Sei w ein Eigenvektor von f zum Eigenwert c. Dann ist

$$f(g(w)) = g(f(w)) = g(c \cdot w) = c \cdot g(w) \ ,$$

also ist $g(w)$ ein Element des Eigenraums von f zum Eigenwert c.

Satz 167: *Es sei $f : V \longrightarrow V$ eine normale Funktion, c ein beliebiger Eigenwert von f und $E(f,c)$ der zugehörige Eigenraum.*

(1) *Das orthogonale Komplement $E(f,c)^\perp$ von $E(f,c)$ ist unter f stabil.*
(2) *Für alle $w \in V$ ist $\|f(w)\| = \|f^*(w)\|$, insbesondere ist* $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^*)$.
(3) *$E(f,c) = E(f^*,\overline{c})$, insbesondere sind alle Eigenwerte von selbstadjungierten Funktionen reell.*
(4) *Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten stehen zueinander senkrecht.*

Beweis:

(1) Sei $w \in E(f,c)^\perp$. Wir zeigen, dass auch $f(w) \in E(f,c)^\perp$ ist.
Für alle $u \in E(f,c)$ ist nach Hilfssatz 166 auch $f^*(u) \in E(f,c)$, also $\langle u, f(w)\rangle = \langle f^*(u), w\rangle = 0$. Daher ist $f(w) \in E(f,c)^\perp$.
(2) Für $w \in V$ ist

$$\langle f(w), f(w)\rangle = \langle f^*(f(w)), w\rangle = \langle f(f^*(w)), w\rangle = \langle f^*(w), f^*(w)\rangle \ ,$$

daher ist $f(w) = 0$ genau dann, wenn $f^*(w) = 0$.
(3) Aus Satz 162 folgt, dass $(f - c\cdot \mathrm{Id}_V)^* = f^* - \overline{c}\cdot \mathrm{Id}_V$. Mit (2) erhalten wir daher

$$E(f,c) = \mathrm{Kern}(f - c\cdot \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Kern}(f^* - \overline{c}\cdot \mathrm{Id}_V) = E(f^*,\overline{c}) \ .$$

(4) Seien u,w Eigenvektoren von f zu zwei verschiedenen Eigenwerten c,d. Nach (3) ist

$$(c-d)\langle u,w\rangle = \langle \overline{c}\cdot u, w\rangle - \langle u, d\cdot w\rangle = \langle f^*(u), w\rangle - \langle u, f(w)\rangle = 0 \ .$$

Daher ist $\langle u,w\rangle = 0$.

Satz 168 : *(„Spektralsatz für normale Funktionen")*
Es sei f eine lineare Funktion von V nach V. Im Fall $K = \mathbb{R}$ nehmen wir zusätzlich an, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f reell sind.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) *Die Funktion f ist normal.*
(2) *V hat eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f.*

Für Matrizen formuliert:
Es sei $A \in K^{n\times n}$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ nehmen wir zusätzlich an, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A reell sind.
Dann ist $\overline{A}^\top \cdot A = A \cdot \overline{A}^\top$ genau dann, wenn es eine Matrix $S \in \mathcal{O}_n$ (falls $K = \mathbb{R}$) bzw. $S \in \mathcal{U}_n$ (falls $K = \mathbb{C}$) gibt so, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Induktion über $n = \dim_K(V)$. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n > 1$. Nach Annahme gibt es eine Zahl $c \in K$ so, dass $U := E(f,c) \neq \{0\}$ ist. Nach Satz 167, (1) ist $U^\perp$ stabil unter f. Daher folgt aus der Induktionsannahme, dass $U^\perp$ eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f hat. Ergänze diese durch eine ON-Basis von U zu einer ON-Basis von V.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Sei $\underline{v}$ eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f und A die Matrix von f bezüglich $\underline{v}$. Dann ist A eine Diagonalmatrix und somit normal.

Satz 169 : *(„Spektralsatz für selbstadjungierte Funktionen")*
Es sei f eine lineare Funktion von V nach V.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) *Die Funktion f ist selbstadjungiert.*
(2) *V hat eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f und alle komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f sind reell.*

Für Matrizen formuliert:
Es sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist $\overline{A}^\top = A$ genau dann, wenn es eine Matrix $S \in \mathcal{O}_n$ (falls $K = \mathbb{R}$) bzw. $S \in \mathcal{U}_n$ (falls $K = \mathbb{C}$) gibt so, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine reelle Diagonalmatrix ist.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Nach Satz 167 sind alle Eigenwerte von f reell. Daher folgt die Behauptung aus Satz 168.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Die Matrix von f bezüglich der Basis aus Eigenvektoren ist eine reelle Diagonalmatrix. Daher ist f selbstadjungiert.

KAPITEL 5

Multilineare Funktionen

Es seien K ein Körper mit $1_K + 1_K \neq 0_K$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K.

§1. Multilineare Funktionen

Definition 170 : Seien $V_1, \ldots, V_\ell$ und W Vektorräume über K. Eine Funktion

$$f : V_1 \times \cdots \times V_\ell \to W \, , \, (x_1, \ldots, x_\ell) \mapsto f(x_1, \ldots, x_\ell) \, ,$$

heißt *K-multilinear*, wenn f in jeder Komponente K-linear ist, d.h. für alle $(x_1, \ldots, x_\ell) \in V_1 \times \cdots \times V_\ell$, für alle $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, für alle $y \in V_k$ und für alle $c \in K$ gilt

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y, x_{k+1}, \ldots, x_\ell) = \\ f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_\ell) + f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_\ell)$$

und

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c \cdot x_k, x_{k+1}, \ldots, x_\ell) = \\ c \cdot f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_\ell) \, .$$

Sei

$$\mathrm{Mult}_K(V_1 \times \cdots \times V_\ell, W) := \{f : V_1 \times \cdots \times V_\ell \to W \mid f \ K\text{-multilinear}\}.$$

Für $\ell = 1$ ist „multilinear" gleich „linear", für $\ell = 2, 3$ sagt man anstelle von „multilinear" auch „bilinear" bzw. „trilinear".

Beispiel 171 : Die Funktion

$$K^\ell \to K \, , \, (x_1, \ldots, x_\ell) \mapsto \prod_{i=1}^{\ell} x_i \, ,$$

ist für $\ell \geq 2$ nicht K-linear, weil im Allgemeinen

$$\prod_{i=1}^{\ell} (a_i + b_i) \neq \left(\prod_{i=1}^{\ell} a_i \right) + \left(\prod_{i=1}^{\ell} b_i \right)$$

ist, aber K-multilinear, weil für alle $(x_1,\dots,x_\ell)\in K^\ell$, $k\in\{1,\dots,\ell\}$, $y\in K$ und $c\in K$ sowohl

$$x_1\dots x_{k-1}(x_k+y)x_{k+1}\dots x_\ell = x_1\dots x_{k-1}x_kx_{k+1}\dots x_\ell + x_1\dots x_{k-1}yx_{k+1}\dots x_\ell$$

als auch

$$x_1\dots x_{k-1}(cx_k)x_{k+1}\dots x_\ell = c(x_1\dots x_{k-1}x_kx_{k+1}\dots x_\ell)$$

gilt.

Satz 172 : $\mathrm{Mult}_K(V_1\times\cdots\times V_\ell,W)$ *ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Untervektorraum von* $\mathcal{F}(V_1\times\cdots\times V_\ell,W)$.

Beweis: Übung.

Satz 173 : *Die Funktion*

$$D:\left(K^{n\times 1}\right)^n\to K\,,\,(x_1,\dots,x_n)\mapsto\det(x_1|\dots|x_n)\,,$$

ist K-multilinear, d.h. die Determinante ist multilinear in den Spalten.
Wegen $\det(A)=\det(A^T)$ *ist die Determinante daher auch multilinear in den Zeilen.*
Insbesondere gilt für $A\in K^{n\times n}$ *und* $c\in K$*:*

$$\det(cA)=c^n\det(A)\,.$$

Beweis: Wegen

$$D(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sign}(\sigma)(x_1)_{\sigma(1)}\dots(x_n)_{\sigma(n)}$$

genügt es nach Satz 172 zu zeigen, dass für jedes $\sigma\in S_n$ die Funktion

$$D_\sigma:(K^{n\times 1})^n\to K\,,\,(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1)_{\sigma(1)}\dots(x_n)_{\sigma(n)}\,,$$

multilinear ist. Für $k\in\{1,\dots,n\}$, $y\in K^{n\times 1}$ und $c\in K$ ist
$D_\sigma(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+y,x_{k+1},\dots,x_n)=$
$(x_1)_{\sigma(1)}\cdots(x_{k-1})_{\sigma(k-1)}((x_k)_{\sigma(k)}+y_{\sigma(k)})(x_{k+1})_{\sigma(k+1)}\cdots(x_n)_{\sigma(n)}=$
$D_\sigma(x_1,\dots,x_n)+D_\sigma(x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)$
und
$D_\sigma(x_1,\dots,x_{k-1},(cx_k)x_{k+1},\dots,x_n)=$
$(x_1)_{\sigma(1)}\cdots(x_{k-1})_{\sigma(k-1)}(c(x_k)_{\sigma(k)})(x_{k+1})_{\sigma(k+1)}\cdots(x_n)_{\sigma(n)}=$
$cD_\sigma(x_1,\dots,\dots,x_n)$.

Satz 174: *Seien $V_1,\dots,V_\ell$ und W Vektorräume über K und $(v_{1i_1})_{i_1\in I_1},\dots,(v_{\ell i_\ell})_{i_\ell\in I_\ell}$ Basen von $V_1,\dots,V_\ell$. Sei $(w_i)_{i\in I}\in\mathcal{F}(I,W)$, wobei*

$$I := I_1\times\cdots\times I_\ell$$

ist. Dann gibt es genau eine multilineare Funktion

$$f : V_1\times\cdots\times V_\ell\to W$$

mit

$$f(v_{1i_1},\dots,v_{\ell i_\ell}) = w_i$$

für alle $i=(i_1,\dots,i_\ell)\in I$. Somit kann eine multilineare Funktion durch Vorgabe der Bilder aller möglichen ℓ-Tupel von Basisvektoren eindeutig definiert werden.

Beweis: Wenn eine derartige Funktion f existiert, dann ist für Vektoren $x_1=\sum_{i_1\in I_1}c_{1i_1}v_{1i_1}\in V_1,\dots,x_\ell=\sum_{i_\ell\in I_\ell}c_{\ell i_\ell}v_{\ell i_\ell}\in V_\ell$

$$\begin{aligned}f(x_1,\dots,x_\ell) &= f(\sum_{i_1\in I_1}c_{1i_1}v_{1i_1},\dots,\sum_{i_\ell\in I_\ell}c_{\ell i_\ell}v_{\ell i_\ell})\\ &= \sum_{i_1\in I_1}\cdots\sum_{i_\ell\in I_\ell}c_{1i_1}\dots c_{\ell i_\ell}f(v_{1i_1},\dots,v_{\ell i_\ell})\\ &= \sum_{i_1\in I_1}\cdots\sum_{i_\ell\in I_\ell}c_{1i_1}\dots c_{\ell i_\ell}w_{(i_1,\dots,i_\ell)}\,,\end{aligned}$$

was die Eindeutigkeit der Funktion beweist. Um die Existenz zu zeigen, definieren wir eine Funktion $f : V_1\times\cdots\times V_\ell\to W$ durch

$$f(x_1,\dots,x_\ell) := \sum_{i_1\in I_1}\cdots\sum_{i_\ell\in I_\ell}c_{1i_1}\cdots_{\ell i_\ell}w_{(i_1,\dots,i_\ell)}\,,$$

wobei $(c_{ji_j})_{i_j\in I_j}$ für $1\le j\le\ell$ die Koordinatenfamilie von $x_j\in V_j$ bezüglich der Basis $(v_{ji_j})_{i_j\in I_j}$ ist. Dann ist leicht nachzuprüfen, dass f multilinear und $f(v_{1i_1},\dots,v_{\ell i_\ell})=w_i$ für alle $i\in I$ ist.

Beispiel 175: Seien $(E_{ij})_{i,j}$, $(F_{k\ell})_{k,\ell}$ und $(G_{rs})_{r,s}$ die Standardbasen von $K^{m\times n}$, $K^{n\times p}$ bzw. $K^{m\times p}$. Dann gibt es nach Satz 174 genau eine bilineare Funktion f: $K^{m\times n}\times K^{n\times p}\to K^{m\times p}$ mit

$$f(E_{ij},F_{k\ell}) = \delta_{jk}G_{i\ell}$$

Für Matrizen $A\in K^{m\times n}$ und $B\in K^{n\times p}$ ist wegen $A=\sum_{i,j}A_{ij}E_{ij}$ und $B=\sum_{k,\ell}B_{k\ell}F_{k\ell}$

$$\begin{aligned}f(A,B) &= \sum_{i,j}\sum_{k,\ell}A_{ij}B_{k\ell}\delta_{jk}G_{i\ell} = \sum_{i,\ell}\left(\sum_j A_{ij}B_{j\ell}\right)G_{i\ell}\\ &= \sum_{i,\ell}(AB)_{i\ell}G_{i\ell} = AB\,,\end{aligned}$$

also f das Matrizenprodukt.

§2. Alternierende Funktionen

Definition 176 : Seien V und W Vektorräume über K. Eine Funktion

$$f : V^\ell \to W \,,\, (x_1, \dots, x_\ell) \mapsto f(x_1, \dots, x_\ell) \,,$$

heißt *K-alternierend*, wenn f K-multilinear ist und alle Elemente von V^ℓ mit zwei gleichen Komponenten auf 0 abbildet, d.h. für alle $(x_1, \dots, x_\ell) \in V^\ell$ mit $x_i = x_k$ für irgendwelche $i \neq k$ ist $f(x_1, \dots, x_\ell) = 0$. Sei

$$\mathrm{Alt}_K(V^\ell, W) := \{ f : V^\ell \to W \mid f \text{ } K\text{-alternierend} \} \,.$$

Satz 177 : $\mathrm{Alt}_K(V^\ell, W)$ *ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Untervektorraum von* $\mathrm{Mult}(V^\ell, W)$.

Beweis: Übung.

Satz 178 : *Die Funktion*

$$D : \left(K^{n\times 1}\right)^n \to K \,,\, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1 | \dots | x_n) \,,$$

ist K-alternierend, d.h. die Determinante ist alternierend in den Spalten. (und damit auch in den Zeilen).

Beweis: Sei $(x_1, \dots, x_\ell) \in (K^{n\times 1})^\ell$ mit $x_i = x_k$ für gewisse $i \neq k$, und sei

$$\tau := (i, k) \in S_n$$

die Vertauschung von i und k. Für $\rho \in S_n$ mit $\mathrm{sign}(\rho) = 1$ ist

$$\mathrm{sign}(\rho\tau) = \mathrm{sign}(\rho) \cdot \mathrm{sign}(\tau) = 1 \cdot (-1) = -1 \,.$$

Somit erhalten wir eine Funktion

$$\{\rho \in S_n \mid \mathrm{sign}(\rho) = 1\} \to \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = -1\} \,,\, \rho \mapsto \rho\tau \,.$$

Deren Umkehrfunktion ist

$$\{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = -1\} \to \{\rho \in S_n \mid \mathrm{sign}(\rho) = 1\} \,,\, \sigma \mapsto \sigma\tau \,,$$

weil $\mathrm{sign}(\sigma\tau) = 1$ und $\tau\tau = \mathrm{Id}_n$ ist. Für $\sigma \in S_n$ sei

$$D_\sigma : (K^{n\times 1})^n \to K \,,\, (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1)_{\sigma(1)} \cdots (y_n)_{\sigma(n)} \,.$$

Dann ist

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} D_\sigma = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \mathrm{sign}(\sigma)=1}} (D_\sigma - D_{\sigma\tau}) \,.$$

Wegen $D_\sigma(x) = D_{\sigma\tau}(x)$ folgt

$$D(x) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \mathrm{sign}(\sigma)=1}} (D_\sigma(x) - D_{\sigma\tau}(x)) = 0 \,.$$

Satz 179: *Seien V,W Vektorräume über K, $f : V^\ell \to W$ alternierend und $(x_1,\ldots,x_\ell) \in V^\ell$. Dann ist für $\sigma \in S_n$*

$$f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(\ell)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f(x_1,\ldots,x_\ell)\,.$$

Insbesondere ist für eine Transposition $(i,k) \in S_n$, $i<k$,

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\ldots,x_\ell) = -f(x_1,\ldots,x_\ell)\,.$$

Beweis: Da jede Permutation Produkt von Transpositionen ist, genügt es zu zeigen, dass für Transpositionen $\tau_1,\ldots,\tau_r \in S_\ell$

$$f(x_{\tau_1\ldots\tau_r(1)},\ldots,x_{\tau_1\ldots\tau_r(\ell)}) = (-1)^r \cdot f(x_1,\ldots,x_\ell)$$

ist. Dies zeigen wir durch Induktion nach r. Für $r=0$ ist die Aussage offenbar richtig. Für $r=1$ schreiben wir $\tau_1 = (i,k)$ mit $i<k$ und folgern aus f alternierend

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i+x_k,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&= f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&\quad +f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&\quad +f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&\quad +f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&= f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&\quad +f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_i,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\\
&\qquad = -f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_\ell)\,.
\end{aligned}$$

Sei nun $r>1$ und wir nehmen an, die Aussage gelte für $r-1$. Setzt man $y_j := x_{\tau_1(j)}$ für $1 \le j \le \ell$, dann folgt

$$\begin{aligned}
f(x_{\tau_1\ldots\tau_r(1)},\ldots,x_{\tau_1\ldots\tau_r(\ell)}) &= f(x_{\tau_1(\tau_2\ldots\tau_r(1))},\ldots,x_{\tau_1(\tau_2\ldots\tau_r(\ell))})\\
&= f(y_{\tau_2\ldots\tau_r(1)},\ldots,y_{\tau_2\ldots\tau_r(\ell)})\\
&= (-1)^{r-1} f(y_1,\ldots,y_\ell)\\
&= (-1)^{r-1} f(x_{\tau_1(1)},\ldots,x_{\tau_1(\ell)})\\
&= (-1)^r f(x_1,\ldots,x_\ell)\,.
\end{aligned}$$

Hilfssatz 180: *Seien V,W Vektorräume über K und $f : V^\ell \to W$ alternierend. Sei $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_n) \in V^n$, $T \in K^{n\times\ell}$ und $\underline{w} = \underline{v}T \in V^\ell$. Dann ist*

$$f(w_1,\ldots,w_\ell) = \sum_{(i_1\ldots i_\ell)\in I} \det(T_{(i_1\ldots i_\ell)}) f(v_{i_1},\ldots,v_{i_\ell})\,,$$

wobei

$$I := \{(i_1,\ldots,i_\ell) \mid 1 \le i_1 < \ldots i_\ell \le n\}$$

ist und die Matrix

$$T_{(i_1\dots i_\ell)} := \begin{pmatrix} T_{i_1 1} & T_{i_1 2} & \dots & T_{i_1 \ell} \\ T_{i_2 1} & T_{i_2 2} & \dots & T_{i_2 \ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ T_{i_\ell 1} & T_{i_\ell 2} & \dots & T_{i_\ell \ell} \end{pmatrix} \in K^{\ell\times\ell}$$

aus den Zeilen von T mit Indizes $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ besteht.

Im Spezialfall $\ell = n$ enthält $I = \{(1,2,\dots,n)\}$ nur ein Element und die Behauptung vereinfacht sich zu

$$f(w_1,\dots,w_n) = \det(T)\cdot f(v_1,\dots,v_n).$$

Beweis: Da f alternierend ist, gilt

$$\begin{aligned} f(w_1,\dots,w_\ell) &= f\Big(\sum_{j_1=1}^{n} T_{j_1 1} v_{j_1}, \dots, \sum_{j_\ell=1}^{n} T_{j_\ell \ell} v_{j_\ell}\Big) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_\ell=1}^{n} T_{j_1 1}\dots T_{j_\ell \ell}\, f(v_{j_1},\dots,v_{j_\ell}) \\ &= \sum_{j\in J} T_{j_1 1}\dots T_{j_\ell \ell}\, f(v_{j_1},\dots,v_{j_\ell}) \end{aligned}$$

mit $J := \{(j_1,\dots,j_\ell) \mid j_1,\dots,j_\ell \in \{1,\dots,\ell\}$ paarweise verschieden$\}$.
Da man jedes Tupel $(j_1,\dots,j_\ell) \in J$ der Größe nach ordnen kann, ist die Funktion

$$I\times S_\ell \to J\,,\; ((i_1,\dots,i_\ell),\sigma) \mapsto (i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(\ell)})\,,$$

surjektiv. Die Funktion ist auch injektiv, weil i_1 die kleinste Komponente von $(j_1,\dots,j_\ell)$ ist, i_2 die zweitkleinste Komponente von $(j_1,\dots,j_\ell)$ usw. und $\sigma(1),\dots,\sigma(\ell)$ die Positionen von $j_1,\dots,j_\ell$ in $(i_1,\dots,i_\ell)$ angibt. Umordnen der Summe mittels dieser Bijektion und Anwenden von Satz 179 liefert

$$\begin{aligned} f(w_1,\dots,w_\ell) &= \sum_{i\in I}\sum_{\sigma\in S_\ell} T_{i_{\sigma(1)}1}\dots T_{i_{\sigma(\ell)}\ell}\, f(v_{i_{\sigma(1)}},\dots,v_{i_{\sigma(\ell)}}) \\ &= \sum_{i\in I}\left(\sum_{\sigma\in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)}1}\dots T_{i_{\sigma(\ell)}\ell}\right) f(v_{i_1},\dots,v_{i_\ell}) \\ &= \sum_{i\in I} \det(T_{(i_1\dots i_\ell)})\, f(v_{i_1},\dots,v_{i_\ell})\,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Satz 181: *Seien V,W Vektorräume über K, $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V und $\ell\in\mathbb{N}$. Sei $(w_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}(I,W)$, wobei*

$$I := \{(i_1,\dots,i_\ell) \mid 1 \le i_1 < \dots i_\ell \le n\}$$

ist. Dann gibt es genau eine alternierende Funktion $f : V^\ell \to W$ mit

$$f(v_{i_1},\ldots,v_{i_\ell}) = w_i$$

für alle $i = (i_1,\ldots,i_\ell) \in I$. Somit kann eine alternierende Funktion durch Vorgabe der Bilder aller geordneten ℓ-Tupel von Basisvektoren eindeutig definiert werden.
Insbesondere: Für $\ell = n$, $V := K^{n\times 1}$ und $W := K$ erhalten wir eine neue Charakterisierung der Determinante: Die Determinante

$$D : \left(K^{n\times 1}\right)^n \to K\,,\ (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \det(x_1|\ldots|x_n)\,,$$

ist die eindeutig bestimmte alternierende Funktion von $\left(K^{n\times 1}\right)^n$ nach K mit $D(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$.

Beweis: Wenn eine derartige Funktion f existiert, dann ist für Vektoren $x_1,\ldots,x_\ell \in V$ mit Koordinatenspalten $c_1,\ldots,c_\ell \in K^{n\times 1}$

$$(x_1,\ldots,x_\ell) = (v_1,\ldots,v_n)T$$

mit $T := (c_1|\ldots|c_\ell) \in K^{n\times\ell}$ und nach Hilfssatz 180

$$f(x_1,\ldots,x_\ell) = \sum_{(i_1\ldots i_\ell)\in I} \det(T_{i_1\ldots i_\ell})\, f(v_{i_1},\ldots,v_{i_\ell})\,,$$

was die Eindeutigkeit der Funktion beweist. Um die Existenz einer derartigen Funktion zu zeigen, definieren wir eine Funktion
$f : V^\ell \to W$ durch

$$f(x_1,\ldots,x_\ell) := \sum_{(i_1\ldots i_\ell)\in I} \det(T_{i_1\ldots i_\ell})\, w_i\,,$$

wobei $T := (c_1|\ldots|c_\ell) \in K^{n\times\ell}$ und $c_j \in K^{n\times 1}$ die Koordinatenspalte von x_j bzgl. der Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ ist. Dann ist nach Satz 178 und Satz 177 die Funktion f alternierend. Wegen $\det(I_\ell) = 1$ gilt auch $f(v_{i_1},\ldots,v_{i_\ell}) = w_i$ für alle $i \in I$.

Beispiel 182 : Sei $V = W = \mathbb{R}^3$, $(v_1,v_2,v_3) = (e_1,e_2,e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\ell = 2$. Dann ist

$$I = \{(1,2),(1,3),(2,3)\},$$

und es gibt genau eine alternierende Funktion $f:\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(e_1,e_2) = e_3 \quad , \quad f(e_1,e_3) = -e_2 \quad \text{und} \quad f(e_2,e_3) = e_1\,.$$

Für Tripel $x = (x_1,x_2,x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = (y_1,y_2,y_3) = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in \mathbb{R}^3$ ist

$$f(x,y) = det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} e_1 - det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} e_2 + det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} e_3\,,$$

also ist

$$x \times y := f(x,y)$$

das *Vektorprodukt* von x und y.

§3. Entwicklung von Determinanten

Definition 183: Sei $A \in K^{n\times n}$. Für $1 \le i, j \le n$ heißt die Matrix

$$A^{(i,j)} \in K^{(n-1)\times(n-1)},$$

die man aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält, die *i-j-te Streichungsmatrix*.

Satz 184: *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:*

(1) *Für $1 \le j \le n$ ist*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{(i,j)})$$

*(*Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte*).*

(2) *Für $1 \le i \le n$ ist*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{(i,j)})$$

*(*Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile*).*

Wenn eine Matrix eine Spalte oder Zeile mit vielen Nullen besitzt, dann ist zur Berechnung der Determinante die Entwicklung nach dieser Spalte oder Zeile zu empfehlen.

Beweis:

(1) Nach Satz 178 ist die Determinante alternierend in den Spalten der Matrix. Wegen

$$A_{-j} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i\,,$$

wobei $(e_1,\ldots,e_n)$ die Standardbasis von $K^{n\times 1}$ ist, folgt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \det(A_{-1}|\ldots|A_{-(j-1)}|e_i|A_{-(j+1)}|\ldots|A_{-n})\,.$$

Sukzessives Vertauschen der j-ten Spalte mit der $(j+1)$-ten Spalte, der $(j+1)$-ten Spalte mit der $(j+2)$-ten Spalte usw. gibt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j} A_{ij} \det(A_{-1}|\ldots|A_{-(j-1)}|A_{-(j+1)}|\ldots|A_{-n}|e_i)\,.$$

Sukzessives Vertauschen der i-ten Zeile mit der $(i+1)$-ten Zeile, der $(i+1)$-ten Zeile mit der $(i+2)$-ten Zeile usw. gibt weiters

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-j+n-i} A_{ij} \det(B)$$

mit

$$B := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A^{(i,j)} & & \vdots \\ & & & 0 \\ A_{i1} & \dots & A_{i,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) B_{\sigma(1)1} \dots B_{\sigma(n-1)(n-1)} B_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(n)=n}} \operatorname{sign}(\sigma) B_{\sigma(1)1} \dots B_{\sigma(n-1)(n-1)} \\ &= \sum_{\rho\in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\rho) B_{\rho(1)1} \dots B_{\rho(n-1)(n-1)} = \det(A^{(i,j)}) \end{aligned}$$

folgt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{(i,j)}) .$$

(2) Entwickeln der Determinante der transponierten Matrix nach der i-ten Spalte gibt

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(A^T) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} (A^T)_{ji} \det((A^T)^{(j,i)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} A_{ij} \det((A^{(i,j)})^T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{(i,j)}) . \end{aligned}$$

Definition 185 : Sei K ein beliebiger Körper und $A \in K^{n\times n}$.

(1) Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 1$ sowie $n_1,\dots,n_p \in \mathbb{N}$ mit $n_1,\dots,n_p \geq 1$ und $n_1+\dots+n_p = n$. Dann heißt die Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{p,p} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $B_{k\ell} \in K^{n_k\times n_\ell}$ ist, eine *Blockzerlegung* von A mit *Blockgrößen* $(n_1,\dots,n_p)$ und *Blöcken* $B_{k\ell}$.
Es ist

$$(B_{k\ell})_{ij} := A_{n_1+\dots+n_{k-1}+i, n_1+\dots+n_{\ell-1}+j} , 1 \leq i \leq n_k , 1 \leq j \leq n_\ell .$$

(2) Die Matrix A hat *obere Blockdreiecksform mit Blockgrößen* $(n_1,\dots,n_p)$, wenn es eine Blockzerlegung von A mit Blockgrößen $(n_1,\dots,n_p)$ und Blöcken $B_{k\ell}$ gibt, sodass für alle Indizes $1 \le k,\ell \le p$ mit $k > \ell$ die Matrix $B_{k\ell} = 0$ ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ 0 & B_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{p-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & B_{pp} \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Nullen für die Nullmatrizen entsprechender Größe stehen.

(3) Die Matrix A hat *untere Blockdreiecksform mit Blockgrößen* $(n_1,\dots,n_p)$, wenn es eine Blockzerlegung von A mit Blockgrößen $(n_1,\dots,n_p)$ und Blöcken $B_{k\ell}$ gibt, sodass für alle Indizes $1 \le k,\ell \le p$ mit $k < \ell$ die Matrix $B_{k\ell} = 0$ ist.

(4) Die Matrix A hat *Blockdiagonalform mit Blockgrößen* $(n_1,\dots,n_p)$, wenn es eine Blockzerlegung von A mit Blockgrößen $(n_1,\dots,n_p)$ und Blöcken $B_{k\ell}$ gibt, sodass für alle Indizes $1 \le k,\ell \le p$ mit $k \ne \ell$ die Matrix $B_{k\ell} = 0$ ist.

Satz 186 : *Sei $A \in K^{n\times n}$ in oberer oder unterer Blockdreiecksform mit Blockgrößen $(n_1,\dots,n_p)$ und Blöcken $B_{k\ell}$. Dann ist*

$$\det(A) = \det(B_{11})\det(B_{22})\dots\det(B_{pp})\,,$$

d.h. die Determinante einer Matrix in Blockdreiecksform berechnet sich als Produkt der Determinanten ihrer Diagonalblöcke.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $p = 1$ und wegen $A = B_{11}$ nichts zu zeigen. Für $n \ge 2$ entwickeln wir die Determinante von A nach der ersten Spalte und erhalten nach Satz 184

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n_1} (-1)^{i+1} A_{i1} \det(A^{(i,1)})\,.$$

Da die Streichungsmatrix $A^{(i,1)}$ wieder Blockdreiecksform besitzt, können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten nach Satz 184

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n_1} (-1)^{i+1} A_{i1} \det((B_{11})^{(i,1)})\det(B_{22})\dots\det(B_{pp}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} (-1)^{i+1} (B_{11})_{i1} \det((B_{11})^{(i,1)})\right)\det(B_{22})\dots\det(B_{pp}) \\ &= \det(B_{11})\det(B_{22})\dots\det(B_{pp})\,.\end{aligned}$$

§4. Die adjungierte Matrix

Satz 187: *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann heißt die Matrix* $\mathrm{Ad}(A) \in K^{n\times n}$ *, definiert durch*

$$\mathrm{Ad}(A)_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A^{(j,i)})$$

für $1 \le i, j \le n$, die zu A adjungierte Matrix*, und es gilt*

$$A\cdot \mathrm{Ad}(A) = \mathrm{Ad}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n\,.$$

Beweis: Für $1 \le i, j \le n$ ist wegen Satz 184,(2)

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}(A)\cdot A)_{ji} &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ad}(A)_{jk}A_{ki} = \sum_{k=1}^{n}A_{ki}(-1)^{j+k}\det(A^{(k,j)})\\ &= \det(A_{-1}|\ldots|A_{-(j-1)}|A_{-i}|A_{-(j+1)}|\ldots|A_{-n}),\end{aligned}$$

wobei A_{-i} in der j-ten Spalte steht. Daher ist

$$(A\cdot\mathrm{Ad}(A))_{ij} = \begin{cases}\det(A) & \text{falls } i=j,\\ 0 & \text{falls } i\ne j,\end{cases}$$

also $A\cdot\mathrm{Ad}(A) = \det(A)\cdot I_n$. Anwenden auf A^T gibt
$A^T\cdot\mathrm{Ad}(A^T) = \det(A^T)\cdot I_n$, also $A^T\cdot\mathrm{Ad}(A)^T = \det(A)\cdot I_n$
und $\mathrm{Ad}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$.

Satz 188: *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. In diesem Fall gilt*

$$A^{-1} = \det(A)^{-1}\,\mathrm{Ad}(A)$$

und

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}\,.$$

Beweis: Wenn A invertierbar ist, dann folgt aus $A\cdot A^{-1} = I_n$ durch Anwenden der Determinante $\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1$, also $\det(A)\ne 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. Wenn umgekehrt $\det(A)\ne 0$ ist, dann ist nach Satz 187

$$A(\det(A)^{-1}\,\mathrm{Ad}(A)) = \det(A)^{-1}\det(A)I_n = I_n$$

und

$$(\det(A)^{-1}\,\mathrm{Ad}(A))A = \det(A)^{-1}\det(A)I_n = I_n\,,$$

also $A^{-1} = \det(A)^{-1}\,\mathrm{Ad}(A)$.

Beispiel 189: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in K^{2\times 2}\,.$$

Dann ist $\det(A) = ad - bc$ und, falls $\det(A) \neq 0$ ist,

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Satz 190: *(*Cramersche Regel*) Sei $A \in K^{n\times n}$ und $b \in K^{n\times 1}$. Dann ist das System linearer Gleichungen (A,b) genau dann eindeutig lösbar, wenn* $\det(A) \neq 0$ *ist. In diesem Fall ist die eindeutige Lösung $x \in K^{n\times 1}$ gegeben durch*

$$x_i = \det(A_{-1}|\dots|A_{-(i-1)}|\,b\,|A_{-(i+1)}|\dots|A_{-n})/\det(A)$$

für $i = 1,\dots,n$.

Beweis: Wenn $\det(A) \neq 0$ ist, dann ist nach Satz 188 die Matrix A invertierbar und $A^{-1}b$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems. Wenn umgekehrt das System (A,b) eindeutig lösbar ist, dann ist $L(A,0) = \{0\}$, folglich $\operatorname{rg}(A) = n - \dim_K(L(A,0)) = n$, somit A äquivalent zu I_n und $\det(A) \neq 0$.

In diesem Fall gilt für die Lösung $x \in K^{n\times 1}$ und für $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\det(A_{-1}|\dots|A_{-(i-1)}|\,b\,|A_{-(i+1)}|\dots|A_{-n}) &= \\
\det(A_{-1}|\dots|A_{-(i-1)}|Ax|A_{-(i+1)}|\dots|A_{-n}) &= \\
\det(A_{-1}|\dots|A_{-(i-1)}|\sum_{k=1}^{n} x_k A_{-k}|A_{-(i+1)}|\dots|A_{-n}) &= \\
x_i \det(A_{-1}|\dots|A_{-(i-1)}|A_{-i}|A_{-(i+1)}|\dots|A_{-n}) &= x_i \det(A),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

§5. Symmetrische Bilinearformen

Definition 191: Eine bilineare Funktion $b : V \times V \to K$ heißt *Bilinearform auf V*.
Eine Bilinearform b ist *symmetrisch*, wenn für alle $v, w \in V$

$$b(v,w) = b(w,v)$$

ist.
Für eine Basis $\underline{v}$ von V heißt

$$M(b,\underline{v}) := \left(b\left(v_i, v_j\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

die *Matrix von b* bezüglich $\underline{v}$. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist *symmetrisch*, wenn

$$A^\top = A$$

ist.

Beispiel 192 : Wenn V ein reeller Vektorraum ist, dann ist jedes Skalarprodukt auf V eine symmetrische Bilinerarform. Die Matrix jedes Skalarproduktes bezüglich jeder ON-Basis ist I_n.

Beispiel 193 : Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist die Funktion

$$K^{n\times 1} \times K^{n\times 1} \to K \quad , \quad (x,y) \longmapsto x^\top \cdot A \cdot y \ ,$$

eine Bilinearform und ihre Matrix bezüglich der Standardbasis ist A.

Satz 194 : *Es seien b eine Bilinearform auf V, $\underline{v}$ eine Basis von V und A die Matrix von b bezüglich $\underline{v}$. Dann gilt:*

(1) *Für alle $x,y \in K^{n\times 1}$ ist*
$$b\left(\underline{v}x, \underline{v}y\right) = x^\top \cdot A \cdot y \ .$$
(2) *Die Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn b symmetrisch ist.*
(3) *Für alle $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist*
$$M\left(b, \underline{v}S\right) = S^\top \cdot A \cdot S \ .$$

Beweis:

(1)
$$\begin{aligned} b\left(\underline{v}x, \underline{v}y\right) &= b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \cdot b\left(v_i, v_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i A_{ij} y_j = x^\top \cdot A \cdot y. \end{aligned}$$

(2) Aus b symmetrisch folgt
$A_{ij} = b\left(v_i, v_j\right) = b\left(v_j, v_i\right) = A_{ji}, 1 \le i,j \le n.$
Umgekehrt folgt aus A symmetrisch, dass
$x^\top \cdot A \cdot y = \left(x^\top \cdot A \cdot y\right)^\top = y^\top \cdot A^\top \cdot x = y^\top \cdot A \cdot x$
ist, nach (1) ist b daher symmetrisch.

(3) Für $1 \le i,j \le n$ ist
$$b\left(\underline{v}S_{-i}, \underline{v}S_{-j}\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} S_{ki} A_{k\ell} S_{\ell j} = \left(S^\top \cdot A \cdot S\right)_{ij} \ .$$

Definition 195 : Zwei Matrizen $A,B \in K^{n\times n}$ heißen *kongruent*, wenn es eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$B = P^\top \cdot A \cdot P$$

gibt. (Zwei kongruente Matrizen beschreiben dieselbe Bilinearform bezüglich zweier Basen von V).

Definition 196: Für $d_1,...,d_n \in K$ sei

$$Diag\left(d_1,...,d_n\right) := \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

die Matrix in Diagonalform mit Diagonalelementen $d_1,...,d_n$.

Satz 197: *Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und r der Rang von A. Dann gibt es $d_1,...,d_r \in K\setminus\{0\}$ so, dass A und*

$$Diag\left(d_1,d_2,...,d_r,0,...,0\right) \in K^{n\times n}$$

kongruent sind. Mit dem folgenden Verfahren können $P \in \mathrm{GL}_n\left(K\right)$ und $d_1,...,d_r \in K$ so berechnet werden, dass

$$P^\top \cdot A \cdot P = Diag\left(d_1,d_2,...,d_r,0,...,0\right)$$

ist:

(1) *Setze $C := (A \mid I_n)$ und $i := 1$.*
(2) *Wenn $i > n$ oder $C_{k\ell} = 0$ für alle $k,\ell \in \{i,...,n\}$ ist, dann ist*

$$C = \left(Diag\left(d_1,...,d_{i-1},0,...,0\right) \mid P^\top\right)$$

und das Verfahren zu Ende.
(3) *Falls $C_{jj} = 0$ ist für alle $j \in \{i,...,n\}$ und $C_{k\ell} \neq 0$ ist für Indizes $k,\ell \in \{i,...,n\}$, addiere die k-te Zeile von C zur ℓ-ten und anschließend die k-te Spalte zur ℓ-ten. Nenne die neue Matrix wieder C.*
(4) *Falls $C_{ii} = 0$ ist, aber $C_{jj} \neq 0$ ist für ein $j \in \{i+1,...,n\}$, vertausche die j-te mit der i-ten Zeile von C und dann die j-te mit der i-ten Spalte. Nenne die neue Matrix wieder C.*
(5) *Falls $C_{ii} \neq 0$ ist, subtrahiere für $j = i+1,...,n$ die $(C_{ii}^{-1} \cdot C_{ji})$-fache i-te Zeile von C von der j-ten und dann die $(C_{ii}^{-1} \cdot C_{ji})$-fache i-te Spalte von der j-ten. Nenne die neue Matrix wieder C, setze $i := i+1$ und fahre mit (2) fort.*

Beweis: Die im Verfahren angegebenen Umformungen von C bedeuten jeweils, dass A und I_n von rechts mit geeigneten Elementarmatrizen Q und von links mit $Q^\top$ multipliziert werden. Insbesondere sind alle Matrizen, die von den ersten n Spalten der mit C bezeichneten Matrizen gebildet werden, symmetrisch.
Mit $r = \mathrm{rg}\left(A\right) = \mathrm{rg}\left(P^\top \cdot A \cdot P\right)$ folgt daraus die Behauptung.

Satz 198 : *„Trägheitssatz von Sylvester“*

(1) *Jede komplexe symmetrische Matrix A ist kongruent zu*
$$Diag\,(1,1,...,1,0,...,0)\ ,$$
wobei die Anzahl der Einsen in der Diagonalmatrix gleich dem Rang von A ist. Insbesondere sind zwei komplexe symmetrische Matrizen genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Rang haben.

(2) *Jede reelle symmetrische Matrix A ist kongruent zu genau einer der Matrizen*
$$I_n^{s,t} := Diag(1,...,1,-1,...,-1,0,...,0),$$
wobei s bzw. t die Anzahl der Einträge 1 *bzw.* -1 *in* $I_n^{s,t}$ *ist. Es gilt* $s+t = \mathrm{rg}\,(A)$ *. Das Paar* (s,t) *heißt* Signatur von A.
Insbesondere sind zwei reelle symmetrische Matrizen genau dann kongruent, wenn sie die gleiche Signatur haben.

Beweis: Nach Satz 197 gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $d_1,\ldots,d_r \in K\backslash\{0\}$ so, dass $P^T \cdot A \cdot P = Diag(d_1,\ldots,d_r,0,\ldots 0)$ ist.

(1) Wähle Zahlen $c_1,\ldots,c_r \in \mathbb{C}$ so, dass $c_i^2 = d_i^{-1}, 1 \le i \le r$, und setze $Q := P \cdot Diag(c_1,\ldots,c_r,0,\ldots,0)$.
Dann ist $Q^T \cdot A \cdot Q = Diag(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$.

(2) Wir können annehmen, dass $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_r$ ist.
Wähle Zahlen $c_1,\ldots,c_r \in \mathbb{R}$ so, dass $c_i^2 = |d_i|^{-1}$ für $1 \le i \le r$ ist, und setze $Q := P \cdot Diag(c_1,\ldots,c_r,0,\ldots.,0)$. Dann ist $Q^T \cdot A \cdot Q = I_n^{s,t}$, wobei s bzw. t die Anzahl der Indizes i mit $d_i > 0$ bzw. $d_i < 0$ ist.
Es ist noch zu zeigen, dass für $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aus $S^T \cdot I_n^{s',t'} \cdot S = I_n^{s,t}$ folgt, dass $s' = s$ und $t' = t$ ist. Wegen $s+t = \mathrm{rg}(I_n^{s,t})$ genügt es, $s' = s$ zu zeigen. Wir können annehmen, dass $s' \ge s$ gilt.
Sei $U := \{y \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid y_1 = \ldots = y_s = 0\}$ und
$W := \{y \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid (Sy)_{s'+1} = (Sy)_{s'+2} = \ldots = (Sy)_n = 0\}$.
Dann ist $\dim_{\mathbb{R}}(U) = n-s$ und wegen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auch $\dim_{\mathbb{R}}(W) = s'$.
Wäre $s' > s$, dann wäre
$$\dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) = n - s + s' > n$$
und daher $U \cap W \neq \{0\}$.
Für $0 \neq x \in U \cap W$ würde dann
$$0 \ge -\sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2 = x^T \cdot I_n^{s,t} \cdot x =$$
$$= (Sx)^T \cdot I_n^{s',t'} \cdot (Sx) = \sum_{i=1}^{s'} (Sx)_i^2 > 0$$
sein. Widerspruch.

§6. Positiv definite Matrizen

Definition 199 : Eine Bilinearform b auf einem reellen Vektorraum V heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, wenn für alle $v \in V \backslash \{0\}$

$$b(v,v) > 0 \quad \text{bzw.} \quad b(v,v) \geq 0$$

ist. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *positiv definit* bzw. *positiv semidefinit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \backslash \{0\}$

$$x^\top \cdot A \cdot x > 0 \quad \text{bzw.} \quad x^\top \cdot A \cdot x \geq 0$$

ist.

Beispiel 200 : Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit und damit auch positiv semidefinit.
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.

Satz 201 :

(1) *Eine Bilinearform ist genau dann positiv definit bzw. positiv semidefinit, wenn ihre Matrix bezüglich einer Basis von V positiv definit bzw. positiv semidefinit ist.*
(2) *Wenn eine Matrix positiv definit bzw. positiv semidefinit ist, dann sind dies auch alle zu ihr kongruenten Matrizen.*

Beweis: Übung.

Satz 202 : *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv definit.*
(2) *Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass $A = B^\top \cdot B$ ist.*
(3) *Die Signatur von A ist $(n, 0)$.*

Beweis: Eine reelle Diagonalmatrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Einträge in der Diagonale positiv sind. Nach Satz 198 gibt es eine invertierbare Matrix P so, dass $P^\top \cdot A \cdot P =: D$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge $0, 1$ oder -1 sind.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Wenn A positiv definit ist, muss D nach Satz 201 auch positiv definit sein, also $D = I_n$ sein. Mit $B := P^{-1}$ folgt (2).
(2) $\Rightarrow$ (3) : Nach (2) ist A kongruent zu I_n.
(3) $\Rightarrow$ (1) : Nach (3) und Satz 198 ist A kongruent zu I_n. Nach Satz 201 ist A positiv definit.

Mit Aussage (3) kann überprüft werden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist.
Mit Aussage (2) können Beispiele für positiv definite symmetrische Matrizen (und damit für Skalarprodukte) konstruiert werden.
Eine Anwendung in der Analysis: Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung im Punkt p Null ist, und A ihre Hesse'sche Matrix in p. Wenn A bzw. $-A$ positiv definit ist, dann hat f in p ein isoliertes Minimum bzw. Maximum.

Satz 203 : *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv semidefinit.*
(2) *Es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A = B^\top \cdot B$ ist.*
(3) *Die Signatur von A ist $(r,0)$, wobei r der Rang von A ist.*

Beweis: Analog dem Beweis von Satz 202.

Satz 204 : *Eine symmetrische reelle Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre* Hauptminoren

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},\ 1 \le k \le n,$$

positive Zahlen sind.

Beweis: Für $1 \le k \le n$ sei

$$A(k) := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

Wenn A positiv definit ist, dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^{k\times 1} \setminus \{0\}$

$$x^\top \cdot A(k) \cdot x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^\top \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,,$$

daher ist $A(k)$ positiv definit. Aus Satz 202, (2) folgt dann, dass $\det(A(k)) > 0$ ist.

Seien nun alle Hauptminoren positiv. Wie zeigen durch Induktion nach n, dass A positiv definit ist. Nach Induktionsannahme ist $A(n-1)$ positiv definit, nach Satz 202, $(1) \Rightarrow (2)$, daher invertierbar.
Somit bilden die Zeilen von $A(n-1)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, deshalb gibt

es Zahlen $c_1,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{R}$ so, dass

$$(A_{n1},\dots,A_{n(n-1)})=\sum_{i=1}^{n-1} c_i A(n-1)_{i-}$$

ist. Wird das c_i-fache der i-ten Zeile von A von der n-ten Zeile subtrahiert und das c_i-fache der i-ten Spalte von der n-ten Spalte, $1\le i\le n$, dann erhalten wir eine zu A kongruente Matrix

$$C:=\begin{pmatrix} A(n-1) & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

mit $d\in\mathbb{R}$. Da wir C aus A erhalten, indem wir A von links und von rechts mit Elementarmatrizen, deren Determinante 1 ist, multiplizieren, ist
$\det(A)=\det(C)=\det(A(n-1))\cdot d$.
Aus $\det(A)>0$ und $\det(A(n-1))>0$ folgt $d>0$.
Da $A(n-1)$ positiv definit ist, gibt es nach Satz 202 eine Matrix
$B\in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ so, dass $A(n-1)=B^\top\cdot B$ ist. Die Matrix

$$M:=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \sqrt{d} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar und $C=M^\top\cdot M$. Nach Satz 202 ist C positiv definit, daher auch die zu C kongruente Matrix A.

Satz 205: *Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte untere Dreiecksmatrix C mit positiven Einträgen in der Diagonale so, dass*

$$C\cdot C^\top=A$$

*ist (*Cholesky-Zerlegung *von A).*

Beweis: Wir zeigen die Existenz durch Induktion über n. Weil A positiv definit ist, muss nach Satz 204 der Eintrag $A_{11}>0$ sein.
Für $n=1$ ist die Aussage richtig, weil jede positive reelle Zahl genau eine positive reelle Wurzel hat.
Sei $n>1$. Mit Schritt (5) des Verfahrens in Satz 197 und anschließender Multiplikation der ersten Zeile und ersten Spalte mit $1/\sqrt{A_{11}}$ erhält man

$$P^\top\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

wobei P eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen in der Diagonale und A' eine symmetrische und positiv definite $(n-1)\times(n-1)$-Matrix ist. Nach Induktionsannahme gibt es eine untere Dreiecksmatrix C' mit positiven Einträgen in der Diagonale so, dass $C'\cdot C'^\top=A'$ ist. Die Matrix

$$C:=(P^\top)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

hat dann die gewünschten Eigenschaften.
Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass B und C untere Dreiecksmatrizen mit positiven Einträgen in der Diagonale sind so, dass

$$C \cdot C^\top = B \cdot B^\top$$

ist. Dann ist

$$B^{-1} \cdot C = B^\top \cdot (C^\top)^{-1}\,.$$

Weil $B^{-1} \cdot C$ eine untere und $B^\top \cdot (C^\top)^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, müssen beide Diagonalmatrizen sein und $B_{ii}^2 = C_{ii}^2$, $1 \leq i \leq n$, sein. Weil die Einträge von B und C in der Diagonale positiv sind, folgt daraus $B^{-1} \cdot C = I_n$, also $B = C$.

Satz 206 : *Zu jeder symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix*
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gibt es genau eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix*
$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $P^2 = A$.
Ist A positiv definit, dann auch P.

Beweis: Nach Satz 169 gibt es eine orthogonale Matrix Q so, dass

$$Q^\top \cdot A \cdot Q = Diag(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0) =: D$$

ist, wobei r der Rang von A ist und $c_1, \dots, c_r$ die positiven Eigenwerte von A sind.
Sei $\sqrt{D} := Diag(\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_r}, 0, \dots, 0)$ und $P := Q \cdot \sqrt{D} \cdot Q^\top$. Dann ist

$$P^2 = Q \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot Q^\top = Q \cdot D \cdot Q^\top = A\,.$$

Wir zeigen noch, dass P eindeutig bestimmt ist. Es seien $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix mit $R^2 = A$ und z ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Es sei $y := R \cdot z - \sqrt{\lambda} \cdot z$. Wegen

$$R \cdot y = A \cdot z - \sqrt{\lambda} \cdot R \cdot z = \lambda \cdot z - \sqrt{\lambda} \cdot R \cdot z = -\sqrt{\lambda} \cdot y$$

und weil R keine negativen Eigenwerte hat, ist $\lambda = 0$ oder $y = 0$.
Wenn $\lambda = 0$ ist, ist $R^2 \cdot z = A \cdot z = 0$ und, weil R invertierbar ist, auch $R \cdot z = 0$.
Wenn $y = 0$ ist, ist $R \cdot z = \sqrt{\lambda} z$.
Also ist in beiden Fällen z auch ein Eigenvektor von R zum Eigenwert $\sqrt{\lambda}$.
Daher ist jede Eigenbasis von A auch eine Eigenbasis von R und die Eigenwerte von R sind durch die von A eindeutig bestimmt. Daher ist auch R eindeutig.

Satz 207 : *Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv definit bzw. positiv semidefinit.*
(2) *Alle Eigenwerte von A sind positiv bzw. nicht negativ.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für „positiv definit"(für „positiv semidefinit" analog).

(1) $\Rightarrow$ (2) : Es sei $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann ist $Ax = \lambda x$, also $0 < x^\top \cdot A \cdot x = \lambda x^\top \cdot x$.
Wegen $x^\top \cdot x > 0$ ist auch $\lambda > 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Weil A symmetrisch ist, gibt es nach Satz 169 eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\top \cdot A \cdot S = Diag(c_1, \ldots, c_n)$ ist, wobei $c_1, \ldots, c_n$ die Eigenwerte von A sind. Nach (2) sind alle c_i positiv, $1 \leq i \leq n$, daher gibt es positive reelle Zahlen d_i mit $d_i^2 = c_i$, $1 \leq i \leq n$.
Sei $B := Diag(d_1, \ldots, d_n) \cdot S$, dann ist $A = B^\top \cdot B$, somit nach Satz 202 positiv definit.

KAPITEL 6

Quadratische Funktionen und Quadriken

Es seien K ein Körper mit $1_K + 1_K \neq 0_K$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K.

§1. Linearformen

Definition 208 : Eine lineare Abbildung von V nach K heißt *Linearform auf V*. Die Menge $\mathrm{Lin}_K(V,K)$ aller linearen Abbildungen von V nach K bezeichnen wir kurz mit V^*.
V^* mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation heißt *Vektorraum der Linearformen auf V* oder *zu V dualer Vektorraum.*

Satz 209 : *Es seien $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung*

$$X_i : V \longrightarrow K \quad , w \longmapsto \quad \textit{Koordinate von } w \textit{ bei } v_i \ ,$$

ist eine Linearform und heißt i-te Koordinatenfunktion bezüglich $\underline{v}$. *Für $1 \leq i, j \leq n$ ist $X_i(v_j) = \delta_{ij}$.*
Das n-Tupel $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ ist eine Basis von V^* und heißt die zu $\underline{v}$ duale Basis von V^*. *Für $f \in V^*$ ist*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) X_i \ .$$

Insbesondere haben V und V^* dieselbe Dimension und sind daher isomorph.

Beweis: Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Koordinatenfunktionen linear sind.
Aus $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = 0$ folgt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$0 = (\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(v_j) = c_j \ .$$

Daher ist $(X_1, \ldots, X_n)$ linear unabhängig.
Sei $f \in V^*$, dann ist für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(v_i) X_i \right) (v_j) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) X_i(v_j) = f(v_j) \ ,$$

also $f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) X_i$.

Satz 210 : *Es seien V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ die dazu duale Basis von V^*. Für jeden Vektor $v \in V$ ist die Abbildung*

$$\langle v, - \rangle : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto \langle v, w \rangle \ ,$$

linear. Die Abbildung

$$V \longrightarrow V^* \quad , \quad v \longmapsto \langle v, - \rangle \ ,$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Wenn $\underline{v}$ eine ON-Basis ist, dann ist $\langle v_i, - \rangle = X_i$, für $1 \le i \le n$.

Beweis: Übung.

Satz 211 : *Es seien $S \in GL_n(K)$, $\underline{w} := \underline{v}S$ und $\underline{X}$ bzw. $\underline{Y}$ die zu $\underline{v}$ bzw. $\underline{w}$ dualen Basen von V^*. Dann ist*

$$\underline{Y} = \underline{X}(S^\top)^{-1} \ .$$

(„Transformieren sich die Basen mit S, dann transformieren sich die dazu dualen Basen mit $(S^\top)^{-1}$“).
Wenn $K = \mathbb{R}$ und $S \in \mathcal{O}_n$ ist, dann gilt $\underline{Y} = \underline{X}S$. („Bei orthogonalem Basiswechsel transformieren sich die dualen Basen wie die Basen“).

Beweis: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$Y_j = \sum_{i=1}^n Y_j(v_i) X_i = \sum_{i=1}^n Y_j\left((\underline{w}S^{-1})_i\right) X_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n (S^{-1})_{ji} X_i = \sum_{i=1}^n ((S^\top)^{-1})_{ij} X_i = \left(\underline{X}(S^\top)^{-1}\right)_j \ .$$

Satz 212 : *Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V, $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^* und*

$$\mathbf{1} : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto 1 \ .$$

(1) *Die Menge der affinen Abbildungen von V nach K ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum.*
Das $(n+1)$-Tupel $(\mathbf{1}, X_1, \dots X_n)$ ist eine Basis dieses Vektorraums. Für eine affine Abbildung $f : V \longrightarrow K$ ist

$$f = f(0)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^n (f(v_i) - f(0)) X_i \ .$$

(2) *Es seien $g : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, A ihre Matrix bezüglich $\underline{v}$, $u = \sum_{i=1}^{n} z_i v_i \in V$ und $z := (z_1, \ldots, z_n) \in K^n$. Dann ist für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$X_j \circ g = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} X_i$$

(kurz: $\underline{X} \circ g = \underline{X} A^\top$),

$$X_j \circ t_u = X_j + z_j \mathbf{1}$$

(kurz: $\underline{X} \circ t_u = z\mathbf{1} + \underline{X}$) und

$$X_j \circ (t_u \circ g) = z_j \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} A_{ji} X_i$$

(kurz: $\underline{X} \circ (t_u \circ g) = z\mathbf{1} + \underline{X} A^\top$).

Beweis: Übung.

Definition 213 : Es sei f eine beliebige Abbildung von V nach K. Die Menge

$$\mathcal{N}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

heißt *Nullstellenmenge von f*.

Satz 214 : *Es seien f eine Abbildung von V nach K, W ein Vektorraum und h eine surjektive Abbildung von W nach V. Dann ist*

$$h^{-1}(\mathcal{N}(f)) = \mathcal{N}(f \circ h) .$$

Beweis: Für $w \in W$ ist $(f \circ h)(w) = 0$ genau dann, wenn $h(w) \in \mathcal{N}(f)$.

Dieser Satz liefert eine Idee zur Beschreibung von Nullstellenmengen gewisser Abbildungen f: Finde eine „einfache“ surjektive Abbildung h so, dass die Nullstellenmenge von $f \circ h$ „gut bekannt“ ist. Dann kann $\mathcal{N}(f)$ als Bild von $\mathcal{N}(f \circ h)$ unter h beschrieben werden.

Beispiel 215 : Seien $f : V \longrightarrow K$ eine affine Abbildung, $f \notin K \cdot \mathbf{1}$, $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis. Dann ist

$$f = f(0)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(0)) X_i$$

und $\mathcal{N}(f)$ eine Hyperebene in V. Mit Satz 212 kann eine bijektive affine Abbildung $h : V \longrightarrow V$ so gewählt werden, dass $f \circ h = X_1$. Dann ist $\mathcal{N}(f)$

das Bild der „Koordinatenhyperebene“ $\mathcal{N}(X_1)$ unter der affinen Abbildung h.

§2. Quadratische Formen

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 216 : Für Abbildungen f und g von V nach K heißt die Abbildung

$$f \cdot g : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto f(w) \cdot g(w) \; ,$$

das *punktweise Produkt* von f und g.
Oft wird statt $f \cdot g$ nur fg geschrieben und f^2 statt $f \cdot f$.

Satz 217 : *Die Menge $\mathcal{F}(V,K)$ ist mit der punktweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Einselement*

$$\mathbf{1} : V \longrightarrow K \quad , \quad w \longmapsto 1 \; .$$

Mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ist $\mathcal{F}(V,K)$ ein Vektorraum. Für $c \in K$ und $f,g \in \mathcal{F}(V,K)$ ist

$$c(f \cdot g) = (cf) \cdot g = f \cdot (cg) \; .$$

Beweis: Übung.

Definition 218 : Eine Abbildung $q : V \longrightarrow K$ heißt *quadratische Form* auf V, wenn sie Summe von Produkten von Linearformen auf V ist, dh. es gibt Linearformen $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ auf V so, dass

$$q = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot g_i$$

ist. Die Menge aller quadratischen Formen ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(V,K)$ und wird mit $Q(V)$ bezeichnet.

Satz 219 :

(1) *Die Familie $(X_i \cdot X_j)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ ist eine K-Basis von $Q(V)$.*
Insbesondere ist

$$\dim_K(Q(V)) = \frac{n(n+1)}{2} \; .$$

(2) *Für $c \in K, w \in V$ und $q \in Q(V)$ ist*

$$q(cw) = c^2 q(w) \; .$$

Beweis:

(1) Es seien $f=\sum_{i=1}^n c_iX_i$ und $g=\sum_{i=1}^n d_jX_j$. Nach Satz 217 ist dann

$$f\cdot g=\sum_{1\le i,j\le n} c_id_jX_iX_j=\sum_{i=1}^n c_id_iX_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(c_id_j+c_jd_i)X_iX_j\ ,$$

also ist $(X_i\cdot X_j)_{1\le i\le j\le n}$ ein Erzeugendensystem von $Q(V)$.
Wenn eine Linearkombination

$$\sum_{1\le i\le j\le n} c_{ij}X_iX_j=0$$

ist, dann ist für alle k

$$0=\left(\sum_{1\le i\le j\le n} c_{ij}X_iX_j\right)(v_k)=c_{kk}$$

und für alle k,l mit $k<l$

$$0=\left(\sum_{1\le i\le j\le n} c_{ij}X_iX_j\right)(v_k+v_l)=c_{kl}\ ,$$

daher ist $(X_i\cdot X_j)_{1\le i\le j\le n}$ auch linear unabhängig.

(2) Für $c\in K$, $w\in V$ und $f,g\in V^*$ ist

$$(f\cdot g)(cw)=f(cw)g(cw)=c^2f(w)g(w)=c^2(f\cdot g)(w)\ .$$

Satz 220:

(1) *Ist $q:V\longrightarrow K$ eine quadratische Form, dann ist*

$$b_q:V\times V\longrightarrow K\quad,\quad (u,w)\longmapsto\frac{1}{2}\left[q(u+w)-q(u)-q(w)\right]\ ,$$

eine symmetrische Bilinearform und heißt die durch q definierte Bilinearform. *Für $w\in V$ ist dann*

$$q(w)=b_q(w,w)\ .$$

Die Matrix von q *bezüglich $\underline{v}$ (Schreibweise: $M(q,\underline{v})$) ist die Matrix von b_q bezüglich $\underline{v}$.*
Der Rang von q *bzw. die* Signatur von q *ist dann der Rang bzw. die Signatur dieser Matrix.*

(2) *Ist $b:V\times V\longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform auf V, dann ist*

$$q_b:V\longrightarrow K\quad,\quad w\longmapsto b(w,w)\ ,$$

eine quadratische Form und heißt die durch b definierte quadratische Form.
Für $u,w\in V$ ist dann

$$b(u,w)=\frac{1}{2}(q_b(u+w)-q_b(u)-q_b(w))\ .$$

Wenn $A \in K^{n\times n}$ die Matrix von b bezüglich $\underline{v}$ ist, dann ist

$$q_b = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}X_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2A_{ij}X_iX_j \ .$$

Für jede n-Spalte $y \in K^{n\times 1}$ ist

$$q_b(\underline{v}\cdot y) = y^\top \cdot A \cdot y \ .$$

(„Jeder quadratischen Form entspricht genau eine symmetrische Bilinearform und, nach Wahl einer Basis von V, genau eine symmetrische Matrix, und umgekehrt.“)

Beweis:

(1) Die Abbildung b_q ist offensichtlich symmetrisch, also genügt es zu zeigen, dass für alle $c \in K$, $u, u', w \in V$

$$b_q(c(u+u'),w) = cb_q(u,w) + cb_q(u',w)$$

ist. Mit $q = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}X_iX_j$ kann das leicht nachgerechnet werden.

(2) Sei A die Matrix von b bezüglich $\underline{v}$. Für alle n-Spalten y ist dann

$$q_b(\underline{v}\cdot y) = b(\underline{v}\cdot y, \underline{v}\cdot y) = y^\top \cdot A \cdot y = \sum_{1\le i\le j\le n} A_{ij}y_iy_j =$$

$$= \sum_{1\le i\le j\le n} A_{ij}X_i(\underline{v}\cdot y)X_j(\underline{v}\cdot y) = (\sum_{1\le i\le j\le n} A_{ij}X_iX_j)(\underline{v}\cdot y) \ .$$

Daher ist $q_b = \sum_{1\le i\le j\le n} A_{ij}X_iX_j \in Q(V)$.

Beispiel 221: Sei $K = \mathbb{R}$ und $\langle -,-\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Die durch $\langle -,-\rangle$ definierte quadratische Form ist

$$\|.\|^2 : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad w \longmapsto \langle w,w\rangle = \|w\|^2 \ ,$$

und ihre Matrix bezüglich $\underline{v}$ ist

$$\big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{1\le i,j\le n} \ .$$

Satz 222: *Es seien q eine quadratische Form auf V, A ihre Matrix bezüglich $\underline{v}$ und r der Rang von A. Seien $P \in GL_n(K)$ und $d_1,\dots,d_r \in K$ so, dass*

$$P^\top \cdot A \cdot P = Diag(d_1,\dots,d_r,0,\dots,0)$$

(siehe Satz 169).
Sei g die bijektive lineare Abbildung von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{v}$ die Matrix P ist. Dann ist

$$q\circ g = d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 \ .$$

Beweis: Für alle n-Spalten $y \in K^{n\times 1}$ ist $(q\circ g)(\underline{v}\cdot y) =$

$$= q(g(\underline{v}\cdot y)) = q(\underline{v}\cdot(Py)) = (Py)^\top \cdot A\cdot (Py) = y^\top \cdot P^\top \cdot A\cdot P\cdot y =$$

$$= y^\top \cdot Diag(d_1,\ldots,d_r,0,\ldots,0)\cdot y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^r d_i X_i^2\right)(\underline{v}\cdot y)\ .$$

§3. Quadratische Funktionen

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 223 : Es seien $c\in K$, $\ell\in V^*$, $q\in Q(V)$ und $q\neq 0$.
Dann ist die Abbildung $f := q+\ell+c\cdot\mathbf{1}$ von V nach K eine *quadratische Funktion auf* V. Oft wird statt $c\cdot\mathbf{1}$ nur c geschrieben.
Die Abbildungen q bzw. ℓ bzw. c heißen *quadratischer* bzw. *linearer* bzw. *konstanter Anteil* von f.
Die Nullstellenmenge einer quadratischen Funktion auf V heißt *Quadrik in* V.

Beispiel 224 : Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis, $u\in V$ und r eine positive reelle Zahl. Der Kreis um u mit Radius r ist eine Quadrik, denn

$$\{w\in V \mid \|w-u\| = r\} = \{w\in V \mid \langle w-u, w-u\rangle = r^2\} =$$
$$= \{w\in V \mid X_1^2(w-u)+X_2^2(w-u) = r^2\} =$$
$$= \mathcal{N}(X_1^2+X_2^2-2X_1(u)X_1-2X_2(u)X_2+X_1(u)^2+X_2(u)^2-r^2)\ .$$

Satz 225 : *Der quadratische bzw. lineare bzw. konstante Anteil einer quadratischen Funktion ist durch diese eindeutig bestimmt.*

Beweis: Seien $q,q'\in Q(V)$, $\ell,\ell'\in V^*$ und $c,c'\in K$ so, dass $q+\ell+c = q'+\ell'+c'$. Dann ist

$$c = (q+\ell+c)(0) = (q'+\ell'+c')(0) = c'\ ,$$

also $c=c'$ und

$$q+\ell = q'+\ell'\ .$$

Für alle $w\in V$ ist

$$2^2q(w)+2\ell(w) = (q+\ell)(2w) = (q'+\ell')(2w) = 2^2q'(w)+2\ell'(w)\ .$$

Wegen $2 = 1+1\neq 0$ ist daher

$$2q+\ell = 2q'+\ell'\ .$$

Somit ist $\ell=\ell'$ und $q=q'$.

Satz 226: *(Affine Normalformen quadratischer Funktionen)*
Es seien f eine quadratische Funktion auf V, q ihr quadratischer Anteil und r der Rang von q. Dann gibt es eine bijektive affine Abbildung $h : V \longrightarrow V$ und $d_0 \in K$, $d_1, \ldots, d_r \in K \setminus \{0\}$ so, dass $f \circ h$ eine der folgenden quadratischen Funktionen ist:

$$d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 + d_0 \ ,$$

$$d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 - 2X_n \quad (\textit{nur wenn } r < n).$$

Wenn $K = \mathbb{C}$ ist, kann $d_1 = \ldots = d_r = 1$ gewählt werden.
Wenn $K = \mathbb{R}$ und $(s, r-s)$ die Signatur von q ist, kann
$d_1 = \ldots = d_s = 1$ und $d_{s+1} = \ldots = d_r = -1$ gewählt werden.
Diese quadratischen Funktionen heißen quadratische Funktionen in affiner Normalform bezüglich $\underline{v}$.

Beweis: Die Abbildung h kann wie folgt berechnet werden:
Wähle $g \in GL_K(V)$ so, dass

$$q \circ g = d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2$$

(siehe Satz 222).
Es seien $\ell = \sum_{i=1}^n a_iX_i$ der lineare und c der konstante Anteil von $f \circ g$. Mit $u := \sum_{i=1}^r (-\frac{1}{2}a_id_i^{-1})v_i$ ist

$$f \circ g \circ t_u = \sum_{i=1}^r d_i(X_i - \frac{1}{2}a_id_i^{-1})^2 + \sum_{i=1}^r a_i(X_i - \frac{1}{2}a_id_i^{-1}) + \sum_{i=r+1}^n a_iX_i + c =$$

$$= \sum_{i=1}^r d_iX_i^2 + \sum_{i=r+1}^n a_iX_i + (c - \sum_{i=1}^r \frac{1}{4}a_i^2d_i^{-1}) \ .$$

Falls $\sum_{i=r+1}^n a_iX_i = 0$ ist, dann ist $h := g \circ t_u$ die gesuchte Abbildung.
Falls $\sum_{i=r+1}^n a_iX_i \neq 0$ ist, dann ist $r < n$ und wir können $g' \in GL_K(V)$ so wählen, dass

$$X_1 \circ g' = X_1, \ldots, X_r \circ g' = X_r \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=r+1}^n a_iX_i\right) \circ g' = -2X_n \ .$$

Dann ist

$$f \circ g \circ t_u \circ g' = \sum_{i=1}^r d_iX_i^2 - 2X_n + c' \ ,$$

wobei $c' := c - \sum_{i=1}^r \frac{1}{4}a_i^2d_i^{-1}$.
Sei $u' := -\frac{1}{2}c'v_n$, dann ist

$$f \circ g \circ t_u \circ g' \circ t_{u'} = \sum_{i=1}^r d_iX_i^2 - 2X_n$$

und $h := g \circ t_u \circ g' \circ t_{u'}$.

Beispiel 227 : Es seien $n=2$, $K=\mathbb{Q}$ und

$$f := X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 + 2X_1 + 3X_2 + 4 \; .$$

Es sei $g : V \longrightarrow V$ die durch $g(v_1) = v_1$ und $g(v_2) = -v_1 + v_2$ definierte lineare Abbildung. Dann ist

$$f \circ g = X_1^2 + 2X_1 + X_2 + 4$$

und

$$f \circ g \circ t_{-v_1} = X_1^2 + X_2 + 3 \; .$$

Es sei $g' : V \longrightarrow V$ die durch $g'(v_1) = v_1$ und $g'(v_2) = -2v_2$ definierte lineare Abbildung. Dann ist

$$f \circ g \circ t_{-v_1} \circ g' = X_1^2 - 2X_2 + 3$$

und

$$f \circ g \circ t_{-v_1} \circ g' \circ t_{\frac{3}{2}v_2} = X_1^2 - 2X_2 \; .$$

Sei $h := g \circ t_{-v_1} \circ g' \circ t_{\frac{3}{2}v_2}$. Dann ist

$$h(y_1v_1 + y_2v_2) = (y_1 + 2y_2 + 2)v_1 - (2y_2 + 3)v_2$$

und $h(\mathcal{N}(X_1^2 - 2X_2)) = \mathcal{N}(f)$. Daher ist

$$\mathcal{N}(f) = \{(y_1 + y_1^2 + 2)v_1 - (y_1^2 + 3)v_2 \mid y_1 \in \mathbb{Q}\} \; .$$

Für $y_1 = 0$ bzw. 1 bzw. -1 erhalten wir $2v_1 - 3v_2$ bzw. $4v_1 - 4v_2$ bzw. $2v_1 - 4v_2 \in \mathcal{N}(f)$.

Beispiel 228 : Es seien $n = 1$, $a, b \in K$ und

$$f := X_1^2 + aX_1 + b \; .$$

Dann ist

$$f \circ t_{-\frac{a}{2}} = X_1^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

und

$$\mathcal{N}(f) = t_{-\frac{a}{2}}\left(\mathcal{N}(X_1^2 - (\frac{a^2}{4} - b))\right) \; .$$

Daher ist $\mathcal{N}(f)$ genau dann nicht leer, wenn es in K ein Element y gibt mit

$$y^2 = \frac{a^2}{4} - b \; .$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist das genau dann der Fall, wenn $\frac{a^2}{4} - b \geq 0$.
Wenn ein solches $y \in K$ existiert, ist $\mathcal{N}(f \circ t_{-\frac{a}{2}}) = \{y, -y\}$ und

$$\mathcal{N}(f) = \{-\frac{a}{2} + y, -\frac{a}{2} - y\} \; .$$

Satz 229 : *(Euklidische Normalformen quadratischer Funktionen)*
Es seien V ein euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V, f eine quadratische Funktion auf V, q ihr quadratischer Anteil und r der Rang von q. Dann gibt es eine Isometrie $h : V \longrightarrow V$ und $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, dass $f \circ h$ eine der folgenden quadratischen Funktionen ist:

$$d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 + d_0 \ ,$$

$$d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 - d_0X_n \quad (\textit{nur wenn } r < n).$$

Dabei ist $\{d_1, \dots, d_n\}$ bzw. $\{0, d_1, \dots, d_r\}$ die Menge der Eigenwerte der Matrix von q bezüglich $\underline{v}$, wenn $r = n$ bzw. $r < n$.
Diese quadratischen Funktionen heißen quadratische Funktionen in euklidischer Normalform bezüglich $\underline{v}$.

Beweis: Die Matrix A von q ist reell und symmetrisch, also gibt es nach Satz 169 eine orthogonale Matrix $P \in \mathcal{O}_n$ so, dass

$$P^\top \cdot A \cdot P = Diag(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

ist . Dabei ist $\{d_1, \dots, d_n\}$, wenn $r = n$, bzw. $\{0, d_1, \dots, d_r\}$, wenn $r < n$, die Menge der Eigenwerte der Matrix von A. Daher kann die Isometrie h wie im Beweis von Satz 226 gefunden werden, wobei die linearen Abbildungen g und g' orthogonale Abbildungen sein müssen, welche die Bedingungen

$$q \circ g = d_1X_1^2 + \ldots + d_rX_r^2 \ ,$$

$$X_1 \circ g' = X_1, \dots, X_r \circ g' = X_r$$

und

$$\left(\sum_{i=r+1}^{n} a_iX_i \right) \circ g' = \left(\sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} a_i^2} \right) X_n$$

erfüllen.

§4. Quadriken

Es seien $\underline{v}$ eine Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Hilfssatz 230 : *Es sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.*

(1) *Die Zusammensetzung $f \circ h$ einer quadratischen Funktion f auf V mit einer surjektiven affinen Abbildung $h : W \longrightarrow V$ ist eine quadratische Funktion auf W.*
(2) *Das Urbild $h^{-1}(Q)$ einer Quadrik Q in V unter einer surjektiven affinen Abbildung $h : W \longrightarrow V$ ist eine Quadrik.*
(3) *Das Bild $h(Q)$ einer Quadrik Q unter einer bijektiven affinen Abbildung $h : W \longrightarrow V$ ist eine Quadrik.*
(4) *Für eine quadratische Funktion f auf V und $c \in K \setminus \{0\}$ ist $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(cf)$.*

Beweis:

(1) Es sei q der quadratische Anteil von f. Weil $q \neq 0$ und weil h surjektiv ist, ist auch $q \circ h \neq 0$ und $f \circ h \neq 0$. Es genügt also zu zeigen, dass $q \circ h$ eine quadratische Funktion ist. Wenn g_1, g_2 Linearformen auf V sind, dann ist $(g_1 g_2) \circ h = (g_1 \circ h)(g_2 \circ h)$. Die Abbildungen $g_1 \circ h$ und $g_2 \circ h$ sind affin, also ist $(g_1 \circ h)(g_2 \circ h)$ eine quadratische Funktion. Weil q eine Linearkombination von Produkten von Linearformen ist, folgt daraus die Behauptung.

(2) Es sei f eine quadratische Funktion mit $\mathcal{N}(f) = Q$. Dann ist $h^{-1}(Q) = \mathcal{N}(f \circ h)$, also folgt die Behauptung aus (1).

(3) Folgt aus (2).

(4) Wegen $c \neq 0$ ist $f(v) = 0$ genau dann, wenn $cf(v) = 0$.

Definition 231 : Zwei Teilmengen M und N von V heißen *affin kongruent*, wenn es eine bijektive affine Abbildung $h : V \longrightarrow V$ gibt, sodass $h(M) = N$ ist.
Zwei Teilmengen M und N eines euklidischen Raumes V heißen *euklidisch kongruent*, wenn es eine Isometrie $h : V \longrightarrow V$ gibt, sodass $h(M) = N$ ist.

Beispiel 232 : Je zwei Dreiecke in V sind affin kongruent.
Zwei Dreiecke in einem euklidischen Raum sind genau dann euklidisch kongruent, wenn die zwei Tripel der Seitenlängen der Dreiecke bis auf die Reihenfolge gleich sind.

Satz 233 : *(Affine Normalformen von Quadriken)*
Es seien $K = \mathbb{R}$, f eine quadratische Funktion auf V, r der Rang und $(s, r-s)$ die Signatur des quadratischen Anteils von f. Die Quadrik $\mathcal{N}(f)$ ist zu einer der folgenden Quadriken affin kongruent:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2) , \\
\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 + 1) , \\
\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 1) , \\
\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 2X_n) \ (\textit{nur wenn } r < n).
\end{gathered}
$$

Beweis: Folgt aus Satz 226 und Lemma 230,(4).

Beispiel 234 : Es seien d eine negative reelle Zahl und $h := \frac{\sqrt{|d|}}{|d|} \cdot \mathrm{Id}_V$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
& h\left(\mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 + d)\right) = \\
& = \mathcal{N}(X_1^2 + \ldots + X_s^2 - X_{s+1}^2 - \ldots - X_r^2 - 1) .
\end{aligned}
$$

Satz 235 : *(Euklidische Normalformen von Quadriken)*
Es seien V ein euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V, f eine quadratische Funktion auf V, q der quadratische Anteil von f, r der Rang und $(s, r-s)$ die Signatur von q. Dann gibt es positive reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_r$ so, dass die Quadrik $\mathcal{N}(f)$ zu einer der folgenden Quadriken euklidisch kongruent ist.:

$$\mathcal{N}(c_1X_1^2 + \ldots + c_sX_s^2 - c_{s+1}X_{s+1}^2 - \ldots - c_rX_r^2) ,$$

$$\mathcal{N}(c_1X_1^2 + \ldots + c_sX_s^2 - c_{s+1}X_{s+1}^2 - \ldots - c_rX_r^2 + 1) ,$$

$$\mathcal{N}(c_1X_1^2 + \ldots + c_sX_s^2 - c_{s+1}X_{s+1}^2 - \ldots - c_rX_r^2 - 1) ,$$

$$\mathcal{N}(c_1X_1^2 + \ldots + c_sX_s^2 - c_{s+1}X_{s+1}^2 - \ldots - c_rX_r^2 - 2X_n) \ (\textit{nur wenn } r < n).$$

Beweis: Folgt aus Satz 229 und Lemma 230,(4).

§5. Quadriken in der Ebene

Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 236 : Es seien $u, w \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $\|u - w\| < 2r$ ist. Dann heißt die Menge

$$E(u, w, r) := \{z \in V \mid \|z - u\| + \|z - w\| = 2r\}$$

Ellipse mit den *Brennpunkten* u und w.

Fixiert man die Enden eines Fadens der Länge $2r$ in den Punkten u und w und durchläuft man dann mit einem Bleistift alle Punkte so, dass der Faden gespannt ist, dann erhält man die Ellipse $E(u, w, r)$ („Gärtner-Ellipse“ oder „Fadenkonstruktion“ der Ellipse).

Beispiel 237 : $E(u, u, r)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt u und Radius r.

Satz 238 : *Es seien $u, w \in V$, $c := \|\frac{u-w}{2}\|$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > c$.*

(1) *Die Ellipse $E(u, w, r)$ ist euklidisch kongruent zu $E(cv_1, -cv_1, r)$. Eine Ellipse $E(u', w', r')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $E(u, w, r)$, wenn $r = r'$ und $\|u - w\| = \|u' - w'\|$ ist.*

(2)
$$E(cv_1, -cv_1, r) = \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2 + \frac{1}{(r^2 - c^2)}X_2^2 - 1) .$$

(3) *Die Ellipse $E(u,w,r)$ ist affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2+X_2^2-1)$. Insbesondere ist jede Ellipse eine Quadrik und je zwei Ellipsen sind zueinander affin kongruent.*

Beweis:

(1) Ist f eine Isometrie, dann ist $f(E(u,w,r)) = E(f(u),f(w),r)$. Daher ist
$$t_{-\frac{u+w}{2}}(E(u,w,r)) = E(\frac{u-w}{2},-\frac{u-w}{2},r) \ .$$
Es sei h die Drehung um 0, die den Punkt $\frac{u-w}{2}$ auf den Punkt cv_1 abbildet. Dann ist
$$(h\circ t_{-\frac{u+w}{2}})(E(u,w,r)) = E(cv_1,-cv_1,r) \ ,$$
insbesondere ist $E(u,w,r)$ euklidisch kongruent zu $E(cv_1,-cv_1,r)$.

(2) Für $z\in V$ ist $z\in E(cv_1,-cv_1,r)$ genau dann, wenn
$$\|z-cv_1\|+\|z+cv_1\| = 2r \ .$$
Man rechnet leicht nach, dass dies genau dann der Fall ist, wenn
$$(r^2-c^2)X_1^2(z)+r^2X_2^2(z)-r^2(r^2-c^2) = 0$$
ist. Wegen $0\le c<r$ und $r^2>0$ ist $r^2-c^2>0$ und $r^2(r^2-c^2)>0$. Daher ist
$$E(cv_1,-cv_1,r) = \mathcal{N}((r^2-c^2)X_1^2+r^2X_2^2-r^2(r^2-c^2)) =$$
$$= \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2+\frac{1}{r^2-c^2}X_2^2-1) \ .$$

(3) Es sei $g: V\longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit $g(v_1)=\frac{1}{r}v_1$ und $g(v_2)=\frac{1}{\sqrt{r^2-c^2}}v_2$.
Dann ist
$$(g\circ h\circ t_{-\frac{u+w}{2}})(E(u,w,r)) = g(E(cv_1,-cv_1,r)) =$$
$$= \mathcal{N}(X_1^2+X_2^2-1) \ ,$$
somit ist $E(u,w,r)$ affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2+X_2^2-1)$.

Definition 239 : Es seien $u,w\in V$ und $r\in\mathbb{R}$ so, dass $0<2r<\|u-w\|$ ist. Dann heißt die Menge
$$H(u,w,r) := \{z\in V \mid 2r = |\,\|z-u\|-\|z-w\|\,|\}$$
Hyperbel mit den *Brennpunkten* u und w.

Satz 240 : *Es seien $u,w\in V$, $c:=\|\frac{u-w}{2}\|$ und $r\in\mathbb{R}$ mit $0<r<c$.*

(1) *Die Hyperbel $H(u,w,r)$ ist euklidisch kongruent zu $H(cv_1,-cv_1,r)$. Eine Hyperbel $H(u',w',r')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $H(u,w,r)$, wenn $r=r'$ und $\|u-w\| = \|u'-w'\|$ sind.*

(2)
$$H(cv_1,-cv_1,r) = \mathcal{N}(\frac{1}{r^2}X_1^2 - \frac{1}{(c^2-r^2)}X_2^2 - 1) \ .$$

(3) *Die Hyperbel $H(u,w,r)$ ist affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2 - X_2^2 - 1)$. Insbesondere ist jede Hyperbel eine Quadrik und je zwei Hyperbeln sind zueinander affin kongruent.*

Beweis: Übung (analog dem Beweis von Satz 238).

Definition 241 : Es seien $u \in V$ und G eine Gerade in V, die nicht u enthält. Dann heißt die Menge $P(u,G)$ aller Punkte $z \in V$, die zu u und zu G den gleichen Abstand haben, *Parabel* mit *Brennpunkt u* und *Leitlinie G*.

Satz 242 : *Es seien $u \in V$, G eine Gerade in V, die nicht u enthält, und c der Abstand des Punktes u von der Geraden G.*

(1) *Die Parabel $P(u,G)$ ist zu $P(\frac{c}{2}v_2, -\frac{c}{2}v_2 + \mathbb{R}v_1)$ euklidisch kongruent. Eine Parabel $P(u',G')$ ist genau dann euklidisch kongruent zu $P(u,G)$, wenn die Abstände von u' zu G' und von u zu G gleich sind.*

(2)
$$P(\frac{c}{2}v_2, -\frac{c}{2}v_2 + \mathbb{R}v_1) = \mathcal{N}(\frac{1}{c}X_1^2 - 2X_2) \ .$$

(3) *Die Parabel $P(u,G)$ ist affin kongruent zu $\mathcal{N}(X_1^2 - 2X_2)$. Insbesondere ist jede Parabel eine Quadrik und je zwei Parabeln sind zueinander affin kongruent.*

Beweis: Übung (analog dem Beweis von Satz 238).

Satz 243 :

(1) *Jede Quadrik in V ist euklidisch kongruent zu einer der folgenden Quadriken:*

Quadrik	*geometrische Beschreibung*
$\mathcal{N}(X_1^2)$	*eine Gerade*
$\mathcal{N}(X_1^2 - \frac{1}{b^2}X_2^2),\ b > 0$	*zwei einander schneidende Geraden*
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2)$	*ein Punkt*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - 1),\ a > 0$	*zwei parallele Geraden mit Abstand* $2a$
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + 1)$	*die leere Menge*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 + \frac{1}{b^2}X_2^2 - 1)$, $0 < b \leq a$	*eine Ellipse mit Achsenabschnitten a und b*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - \frac{1}{b^2}X_2^2 - 1)$, $a > 0, b > 0$	*eine Hyperbel mit Achsenabschnitten a und b*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - 2X_2),\ a > 0$	*eine Parabel mit Parameter* a^2

(2) *Jede Quadrik ist affin kongruent zu einer der Quadriken in* (1) *mit* $a = b = 1$.

Beweis:

(1) Folgt aus Satz 235 und den Sätzen 238, 240, 242.
(2) Folgt aus Satz 233.

Satz 244 :

(1) *Es seien Q eine Ellipse in V mit Brennpunkten u und w. Dann gibt es für jeden Punkt $z \in Q$ genau eine Gerade T_z in V, deren Durchschnitt mit Q gleich $\{z\}$ ist. Diese Gerade heißt* Tangente *an Q im Punkt z. Die Winkel zwischen der Tangente T_z und der Geraden durch z und u sowie der Geraden durch z und w sind gleich.*

(2) *Es sei Q eine Parabel in V mit Brennpunkt u und Leitlinie L. Dann gibt es für jeden Punkt $z \in Q$ genau eine Gerade T_z in V, die nicht senkrecht zur Leitlinie von Q steht und deren Durchschnitt mit Q gleich $\{z\}$ ist. Diese Gerade heißt* Tangente *an Q im Punkt z. Die Winkel zwischen der Tangente T_z und der Geraden durch z und u sowie der zu L senkrecht stehenden Geraden durch z sind gleich.*

Beweis:

(1) Sei $f : V \longrightarrow V$ eine bijektive affine Abbildung. Wenn G eine Gerade in V ist, deren Durchschnitt mit $f(Q)$ gleich $\{f(z)\}$ ist, dann ist der Durchschnitt von $f^{-1}(Q)$ mit Q gleich $\{z\}$. Nach Satz 238 genügt es daher, die Aussage für

$$Q = \mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 1)$$

zu beweisen. In diesem Fall kann leicht nachgeprüft werden, dass die Gerade

$$T_z := \mathcal{N}(X_1(z)X_1 + X_2(z)X_2 - 1)$$

die angegebenen Eigenschaften hat.

Nach Satz 238 können wir annehmen, dass

$$Q = E(cv_1, -cv_1, r)$$

ist, wobei $r > c > 0$ ist. Sei

$$y := \frac{1}{(r^2 - c^2)} z_2 v_1 - \frac{1}{r^2} z_1 v_2 \ .$$

Dann ist $z + \mathbb{R}y$ die Tangente an Q im Punkt z. Seien α bzw. β die Winkel zwischen T_z und der Geraden durch z und cv_1 bzw. $-cv_1$. Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle z - cv_1, y\rangle}{\|z - cv_1\| \cdot \|y\|} \ \text{ und } \ \cos(\beta) = \frac{\langle z + cv_1, y\rangle}{\|z + cv_1\| \cdot \|-y\|} \ .$$

Da α und β im Intervall $[0, \pi]$ liegen, genügt es nachzurechnen, dass $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ ist. Mit $z_2^2 = \frac{1}{(r^2-c^2)}(r^2 - z_1^2)$ erhält man

$$\|z \pm cv_1\| = \sqrt{(z_1 \pm c)^2 + z_2^2} = \frac{r^2 \pm cz_1}{r} \ .$$

Weiters ist

$$\langle z - cv_1, y\rangle = \frac{cz_2}{r^2(r^2 - c^2)}(cz_1 - r^2)$$

und

$$\langle z + cv_1, -y \rangle = \frac{-cz_2}{r^2(r^2-c^2)}(cz_1 + r^2) \, ,$$

daraus folgt $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.

(2) Übung.

Aus diesem Satz folgt: Ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt einer Ellipse ausgeht und an der Ellipse reflektiert wird, geht durch den anderen Brennpunkt. Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt einer Parabel ausgehen und an der Parabel reflektiert werden, sind dann zueinander parallel.

§6. Quadriken im Raum

Es seien V ein dreidimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 245 : Es seien E eine Ebene in V, G eine Gerade in E und N eine Teilmenge von E. Eine Teilmenge M von V *entsteht aus N durch Drehung um die Gerade G*, wenn

$$M = \{f(u) \mid u \in N, \ f \text{ Drehung mit Drehachse } G\}$$

ist.

Beispiel 246 : Der Einheitskreis mit Mittelpunkt 0 in der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene entsteht aus $\{v_1\}$ durch Drehung um die Gerade $\mathbb{R}\, v_3$.

Satz 247 : *Es seien c, d, e reelle Zahlen. Die Quadrik*

$$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + cX_3^2 + dX_3 + e)$$

entsteht aus

$$\mathcal{N}(X_1^2 + cX_3^2 + dX_3 + e) \cap \mathcal{N}(X_2)$$

durch Drehung um die Gerade $\mathbb{R}\, v_3$.

Beweis: Es seien f eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}\, v_3$ mit Drehwinkel t und $u := a_1 v_1 + a_3 v_3 \in \mathcal{N}(X_1^2 + cX_3^2 + dX_3 + e) \cap \mathcal{N}(X_2)$. Dann ist

$$f(u) = a_1 \cos(t) v_1 + a_1 \sin(t) v_2 + a_3 v_3$$

und

$$(X_1^2 + X_2^2 + cX_3^2 + dX_3 + e)(f(u)) = a_1^2 + ca_3^2 + da_3 + e =$$

$$= (X_1^2 + cX_3^2 + dX_3 + e)(u) = 0 \, .$$

Ist umgekehrt $w := b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \in \mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + cX_3^2 + dX_3 + e)$, dann ist

$$b_1^2 + b_2^2 = -(ca_3^2 + da_3 + e) =: R \geq 0 \, .$$

Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $r^2 = R$ ist. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit $b_1 = r \cdot \cos(\alpha)$ und $b_2 = r \cdot \sin(\alpha)$. Somit ist w das Bild von $rv_1 + b_3v_3$ unter der Drehung um die Achse $\mathbb{R}v_3$ mit Drehwinkel α.

Beispiel 248 : Die Quadrik $\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - 1)$ in V entsteht aus der Hyperbel $\mathcal{N}(X_1^2 - X_3^2 - 1)$ (in der von v_1 und v_3 erzeugten Ebene) durch Drehung um die Gerade $\mathbb{R}v_3$.
Die Quadrik $\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 - 2X_3)$ in V entsteht aus der Parabel $\mathcal{N}(X_1^2 - 2X_3)$ (in der von v_1 und v_3 erzeugten Ebene) durch Drehung um die Gerade $\mathbb{R}v_3$.

Satz 249 :

(1) *Jede Quadrik in V ist euklidisch kongruent zu einer der folgenden Quadriken:*

Quadrik	*geometrische Beschreibung*
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)$	*die leere Menge*
$\mathcal{N}(X_1^2)$	*eine Ebene*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - X_2^2)$, $a > 0$	*zwei einander schneidende Ebenen*
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2)$	*eine Gerade*
$\mathcal{N}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$	*ein Punkt*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2 - 1)$, $a > 0$	*zwei parallele Ebenen mit Abstand 2a*

$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2-X_3^2)$, $a \geq b > 0$	*ein Doppelkegel*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2+\frac{1}{c^2}X_3^2-1)$ $a \geq b \geq c > 0$	*ein Ellipsoid mit Achsenabschnitten a,b,c*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2-\frac{1}{c^2}X_3^2+1)$ $a \geq b > 0, c > 0$	*ein zweischaliges Hyperboloid*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2-\frac{1}{c^2}X_3^2-1)$ $a \geq b > 0, c > 0$	*ein einschaliges Hyperboloid*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2-1)$ $a \geq b > 0$	*ein elliptischer Zylinder*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2-\frac{1}{b^2}X_2^2+1)$ $a > 0, b > 0$	*ein hyperbolischer Zylinder*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2-2X_2)$ $a > 0$	*ein parabolischer Zylinder*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2-\frac{1}{b^2}X_2^2-2X_3)$ $a > 0, b > 0$	*ein hyperbolisches Paraboloid*
$\mathcal{N}(\frac{1}{a^2}X_1^2+\frac{1}{b^2}X_2^2-2X_3)$ $a \geq b > 0$	*ein elliptisches Paraboloid*

(2) *Jede Quadrik in V ist affin kongruent zu einer der Quadriken in* (1) *mit $a = b = c = 1$.*

Beweis: Folgt aus Satz 233, Satz 235 und, für die geometrische Beschreibung, aus Satz 247.

§7. Singulärwertzerlegung

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine ON-Basis von V und $\underline{X}$ die dazu duale Basis von V^*.

Definition 250 : Die Menge aller Vektoren der Länge 1 in V heißt *Einheitssphäre in V*, wir bezeichnen sie mit $\mathcal{S}(V)$.

Beispiel 251 : Wenn $n = 2$, dann ist $\mathcal{S}(V)$ der Einheitskreis um 0 in V. Wenn $n = 3$, dann heißt $\mathcal{S}(V)$ die „Oberfläche der Einheitskugel“ um 0 in V.

Satz 252 : *Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ ist genau dann orthogonal, wenn sie die Einheitssphäre in V auf sich abbildet.*

Beweis: Wenn f orthogonal und $\|v\| = 1$ ist, dann ist auch $\|f(v)\| = 1$. Umgekehrt folgt aus $f(\{u \in V \mid \|u\| = 1\}) = \{u \in V \mid \|u\| = 1\}$, dass für alle $v, w \in V$

$$\|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| = \|v - w\| \cdot \left\| f\left(\frac{v - w}{\|v - w\|}\right) \right\| = \|v - w\|$$

ist.

Nun gehen wir der Frage nach, wie das Bild der Einheitssphäre in V unter einer beliebigen bijektiven linearen Abbildung aussieht. Dazu benötigen wir die folgenden Vorbereitungen.

Satz 253 : *(„Polarzerlegung von Matrizen“)*
Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix P und eine orthogonale Matrix $S \in \mathcal{O}_n$ so, dass

$$B = S \cdot P$$

ist. Dabei ist die Matrix P eindeutig bestimmt und es gilt $P^2 = B^\top \cdot B$.
Wenn B invertierbar ist, dann ist auch S eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Matrix $B^\top \cdot B$ ist symmetrisch und nach Satz 203 positiv semidefinit.
Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von P: Aus $B = S \cdot P$ folgt

$$B^\top \cdot B = (S \cdot P)^\top \cdot (S \cdot P) = P^\top \cdot S^\top \cdot S \cdot P = P^2 ,$$

also ist P nach Satz 206 eindeutig bestimmt.
Wir zeigen nun die Existenz von P und S: Nach Satz 206 gibt es genau eine

symmetrische, positiv semidefinite Matrix P mit $P^2 = B^\top \cdot B$. Nach Satz 169 existiert eine orthogonale Matrix Q so, dass

$$Q^\top \cdot P \cdot Q = Diag(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0) =: D$$

ist, wobei r der Rang von P ist und $c_1, \dots, c_r$ die positiven Eigenwerte von P sind. Nun ist

$$Q \cdot D^2 \cdot Q^\top = P^2 = B^\top \cdot B \ ,$$

also

$$D^2 = (B \cdot Q)^\top \cdot (B \cdot Q) \ .$$

Daher ist

$$\langle (B \cdot Q)_{-i}, (B \cdot Q)_{-j} \rangle = c_i^2 \delta_{ij} \text{ für } 1 \leq i, j \leq r$$

und

$$\langle (B \cdot Q)_{-i}, (B \cdot Q)_{-i} \rangle = 0 \text{ für } r < i \leq n \ ,$$

also

$$(B \cdot Q)_{-i} = 0 \text{ für } r < i \leq n \ .$$

Es sei

$$D' := Diag(c_1^{-1}, \dots, c_r^{-1}, 0, \dots, 0) \ .$$

Dann bilden die ersten r Spalten von $B \cdot Q \cdot D'$ eine orthonormale Familie in $\mathbb{R}^{n \times 1}$ und können durch Spalten $M_{(r+1)}, \dots, M_n$ zu einer ON-Basis von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ergänzt werden. Sei

$$M := \big(0, \dots, 0, M_{(r+1)}, \dots, M_n\big) \in \mathbb{R}^{n \times n} \ .$$

Dann ist $U := B \cdot Q \cdot D' + M$ eine orthogonale Matrix und

$$U \cdot D = B \cdot Q \cdot D' \cdot D + M \cdot D = B \cdot Q + 0 = B \cdot Q \ .$$

Also ist

$$B = U \cdot D \cdot Q^\top = U \cdot Q^\top \cdot P$$

und $S := U \cdot Q^\top$ ist orthogonal.

Beispiel 254 : Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit ON-Basis $(1, i)$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $z := a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Die Matrix von

$$m_z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad x \longmapsto z \cdot x \ ,$$

bezüglich der Basis $(1, i)$ ist

$$B := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ .$$

Daher ist

$$B^\top \cdot B = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{pmatrix}^2 \ .$$

Seien

$$P := \begin{pmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := B \cdot P^{-1} = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ .$$

Dann ist S orthogonal und P ist symmetrisch und positiv definit. Wegen $\det(S) = 1$ ist

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} ,$$

wobei α der orientierte Winkel von 1 nach z ist. Somit ist

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |z| & 0 \\ 0 & |z| \end{pmatrix}$$

die Polarzerlegung von B.

Definition 255 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $p := \min(m,n)$ und $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir mit

$$Diag_0(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

die Matrix, die man aus $Diag(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ durch Anfügen von $n - p$ Nullspalten und $m - p$ Nullzeilen erhält.

Satz 256 : *(Singulärwertzerlegung von Matrizen)*
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $p := \min(m,n)$. Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt es orthogonale Matrizen $R \in \mathcal{O}_m$, $Q \in \mathcal{O}_n$ und eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0$ mit

$$A = R \cdot Diag_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \cdot Q .$$

Die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ heißen Singulärwerte *von A und ihre Quadrate sind die Eigenwerte von $A^\top \cdot A$.*

Beweis: Wir können annehmen, dass $m \leq n$ (sonst ersetzen wir A durch $A^\top$). Es sei r der Rang von A und V der von den Spalten von $A^\top$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}}(V^\perp) = n - r$. Es seien $(M_1, \ldots, M_r)$ eine ON-Basis von V, $(M_{r+1}, \ldots, M_n)$ eine ON-Basis von $V^\perp$ und $M := (M_1, \ldots, M_n) \in \mathcal{O}_n$. Dann ist

$$A \cdot M = (B \mid 0) \quad ,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Matrix mit Rang r ist. Nach Satz 253 gibt es ein $S \in \mathcal{O}_m$ und eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix P mit $B = S \cdot P$. Nach Satz 169 gibt es eine orthogonale Matrix
$U \in \mathcal{O}_m$ so, dass $U^\top \cdot P \cdot U$ eine positiv semidefinite Diagonalmatrix
$D := Diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ ist. Es sei U_1 die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann ist

$$A = (B \mid 0) \cdot M^\top = (S \cdot U \cdot D \cdot U^\top \mid 0) \cdot M^\top = S \cdot U \cdot (D \mid 0) \cdot U_1^\top \cdot M^\top \quad .$$

Mit $R := S \cdot U$ und $Q := U_1^\top \cdot M^\top$ folgt die Behauptung.
Wegen
$$A^\top \cdot A = Q^\top \cdot Diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2) \cdot Q$$
sind $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$ die Eigenwerte von $A^\top \cdot A$.

Satz 257 : *Es seien $f : V \longrightarrow V$ eine bijektive lineare Abbildung, A die Matrix von f bezüglich $\underline{v}$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die Singulärwerte von A. Dann ist das Bild der Einheitssphäre in V unter f ein Ellipsoid mit Achsenabschnitten $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, das heißt euklidisch kongruent zu*
$$\mathcal{N}(\frac{1}{\sigma_1^2}X_1^2 + \cdots \frac{1}{\sigma_n^2}X_n^2 - 1) \quad .$$
Insbesondere ist im Fall $n = 2$ das Bild des Einheitskreises eine Ellipse.

Beweis: Sei $A = R \cdot Diag(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \cdot Q$ eine Singulärwertzerlegung von A. Dann ist $f = g_1 \circ h \circ g_2$, wobei g_1, g_2 orthogonale Abbildungen von V nach V sind und $h : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit
$f(v_i) = \sigma_i v_i$, $1 \leq i \leq n$ ist. Nach Satz 252 ist daher
$$f(\mathcal{S}(V)) = g_1 \circ h \circ g_2(\mathcal{S}(V)) = g_1 \circ h(\mathcal{S}(V)) =$$
$$= g_1 \left(\mathcal{N}(\frac{1}{\sigma_1^2}X_1^2 + \cdots \frac{1}{\sigma_n^2}X_n^2 - 1) \right) .$$

Definition 258 : Es seien r der Rang von A und
$A = R \cdot Diag_0(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \cdots, 0) \cdot Q$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann heißt die Matrix
$$A^+ := Q^\top \cdot Diag_0(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \cdots, 0) \cdot R^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$$
die *Pseudo-Inverse* von A.
(Der folgende Satz zeigt, dass A^+ durch A eindeutig bestimmt ist).
Im Fall $m = n = r$ ist $A^+ = A^{-1}$.

Satz 259 : *Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und A^+ die Pseudo-Inverse von A. Für jedes $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ist*
$$A^+ b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$
die eindeutig bestimmte Näherungslösung mit kleinster Länge des linearen Gleichungssystems „$A \cdot x = b$“ (vgl. Kapitel 2, §3), das heißt:

(1) *Für alle $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ist $\|A \cdot (A^+ \cdot b) - b\| \leq \|A \cdot x - b\|$.*
(2) *Für alle $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mit $\|A \cdot z - b\| = \|A \cdot (A^+ \cdot b) - b\|$ ist $\|A^+ \cdot b\| \leq \|z\|$.*

Insbesondere ist A^+ durch A eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir betrachten A als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ nach $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Die Bedingung (1) bedeutet, dass $A\cdot(A^+\cdot b)$ der Fußpunkt des Lotes von b auf dem Bild von A ist. Sei M sein Urbild unter A. Dann ist M ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times 1}$ und die Bedingung (2) bedeutet, dass $A^+\cdot b$ der Fußpunkt des Lotes von 0 auf M ist.
Es seien r der Rang von A und $A = R\cdot Diag_0(\sigma_1,\dots,\sigma_r,0,\cdots,0)\cdot Q$ eine Singulärwertzerlegung von A. Dann ist

$$A^+ = Q^\top\cdot Diag_0(\sigma_1^{-1},\dots,\sigma_r^{-1},0,\cdots,0)\cdot R^\top\ .$$

Das Bild von A ist das Bild von $R\cdot Diag_0(\sigma_1,\dots,\sigma_r,0,\cdots,0)$, wird also von den ersten r Spalten von R erzeugt. Der Fußpunkt des Lotes von b auf dem Bild von A ist daher

$$\sum_{i=1}^{r}\langle R_{-i},b\rangle R_{-i}\ ,$$

sein Urbild unter R ist

$$\sum_{i=1}^{r}\langle R_{-i},b\rangle e_i\ ,$$

dabei ist $(e_1,\dots e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Das Urbild dieses Elementes unter $Diag_0(\sigma_1,\dots,\sigma_n,0,\cdots,0)$ ist der affine Raum

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\langle R_{-i},b\rangle}{\sigma_i}e_i + \mathbb{R}\langle e_{r+1},\dots e_n\rangle\ ,$$

dessen Urbild unter Q ist der affine Raum

$$M := \sum_{i=1}^{r}\frac{\langle R_{-i},b\rangle}{\sigma_i}(Q^\top)_{-i} + \mathbb{R}\langle (Q^\top)_{-(r+1)},\dots (Q^\top)_{-n}\rangle\ .$$

Der Fußpunkt des Lotes von 0 auf M ist

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\langle R_{-i},b\rangle}{\sigma_i}(Q^\top)_{-i} = A^+\cdot b\ .$$

KAPITEL 7

Verallgemeinerte Eigenräume

Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K ist und $f : V \to V$ eine lineare Funktion, dann stellt sich die Frage, wie „einfach" die Matrix von f durch Wahl einer geeigneten Basis gemacht werden kann. In diesem Kapitel geben wir für $K = \mathbb{C}$ eine vollständige Antwort auf diese Frage. Da für nicht-diagonalisierbare Funktionen die Summe der Eigenräume nicht den ganzen Definitionsbereich ergibt, liegt es nahe, den Begriff des Eigenraums zu verallgemeinern.

§1. Diagonalisierbare Funktionen

Definition 260: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f : V \to V$ eine lineare Funktion.

(1) Die Funktion f heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis $\underline{u}$ von V gibt, sodass die Matrix von f bezüglich $\underline{u}$ Diagonalform hat.
(2) Eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ von V heißt eine *Eigenbasis* von f, wenn $w_1, \ldots, w_n$ Eigenvektoren von f sind.

Satz 261: *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f : V \to V$ eine K-lineare Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist diagonalisierbar.*
(2) *Es gibt eine Eigenbasis von f.*
(3) *V ist die Summe der Eigenräume von f.*
(4) *Die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f ist gleich der Dimension von V.*

In diesem Fall bekommt man eine Eigenbasis von f, indem man für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums berechnet und diese Basen dann zusammensetzt.

Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von f.
(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\underline{u}$ eine Basis von V so, dass die Matrix B von f bezüglich $\underline{u}$ Diagonalform hat. Dann ist für $j = 1, \ldots, n$

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} u_i = B_{jj} u_j ,$$

also u_j ein Eigenvektor von f zum Eigenwert B_{jj}, und $\underline{u}$ eine Eigenbasis von f.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Eigenbasis von f. Dann sind $w_1, \ldots, w_n$ Eigenvektoren von f. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die zugehörigen Eigenwerte von f. Dann ist für $j = 1, \ldots, n$

$$f(w_j) = a_j w_j \,,$$

also hat die Matrix von f bezüglich der Basis $\underline{w}$ Diagonalform.
(2) $\Rightarrow$ (3): Jeder Vektor der Eigenbasis ist in einem Eigenraum und damit in der Summe aller Eigenräume enthalten. Da die Eigenbasis ganz V erzeugt, ist auch V in der Summe aller Eigenräume enthalten. Somit ist V die Summe der Eigenräume von f.
(3) $\Rightarrow$ (2): Nach Satz 42 ist V die direkte Summe aller Eigenräume. Wählt man in jedem Eigenraum eine Basis, dann erhält man nach Satz 41 eine Eigenbasis.
(3) $\Rightarrow$ (4): Nach Satz 42 ist $V = E(f, c_1) \oplus \cdots \oplus E(f, c_\ell)$. Nach Satz 41 folgt daraus

$$dim_K(V) = \dim_K(E(f, c_1)) + \cdots + \dim_K(E(f, c_\ell)) \,.$$

(4) $\Rightarrow$ (3): Nach Satz 42 ist die Summe aller Eigenräume direkt und daher

$$\begin{aligned}\dim_K(V) &= \dim_K(E(f, c_1)) + \cdots + \dim_K(E(f, c_\ell)) \\ &= \dim_K(E(f, c_1) + \cdots + E(f, c_\ell)) \,,\end{aligned}$$

also $V = E(f, c_1) + \cdots + E(f, c_\ell)$.

Satz 262 : *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K der Dimension n und $f : V \to V$ eine lineare Funktion mit n verschiedenen Eigenwerten. Dann ist f diagonalisierbar und jeder Eigenraum von f ist eindimensional.*

Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_n$ die Eigenwerte von f. Da jeder Eigenraum mindestens Dimension 1 hat, ist

$$\begin{aligned}\dim_K(V) = n &\le \dim_K(E(f, c_1)) + \cdots + \dim_K(E(f, c_n)) \\ &= \dim_K(E(f, c_1) \oplus \cdots \oplus E(f, c_n)) \le \dim_K(V) \,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\dim_K(V) = \dim_K(E(f, c_1)) + \cdots + \dim_K(E(f, c_n))$$

und $\dim_K(E(f, c_j)) = 1$ für alle $1 \le j \le n$. Nach Satz 261,(4) $\Rightarrow$ (1) ist f diagonalisierbar.

§2. Verallgemeinerte Eigenräume

In diesem Abschnitt seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $n := \dim_K(V)$ und $f : V \to V$ eine K-lineare Funktion.

Definition 263 : Sei $c \in K$ ein Eigenwert von f. Dann heißt die Menge

$$V(f,c) := \{x \in V \mid \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } (f - c\,\mathrm{Id}_V)^k(x) = 0\}$$

der *verallgemeinerte Eigenraum* von f zum Eigenwert c. Die Vektoren in $V(f,c)$ ungleich 0 nennt man *verallgemeinerte Eigenvektoren* von f zum Eigenwert c.
Es ist

$$E(f,c) \subset V(f,c)\,,$$

d.h. der Eigenraum von f zum Eigenwert c ist im verallgemeinerten Eigenraum enthalten.

Satz 264 : *Sei $c \in K$ ein Eigenwert von f. Dann ist*

$$V(f,c) = \mathrm{Kern}((f - c\,\mathrm{Id}_V)^n)\,,$$

insbesondere ist $V(f,c)$ ein Untervektorraum von V.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathrm{Kern}((f - c\,\mathrm{Id}_V)^n) \subset V(f,c)$, sodass nur $V(f,c) \subset \mathrm{Kern}((f - c\,\mathrm{Id}_V)^n)$ zu zeigen ist. Sei dazu $u \in V(f,c)$ mit $u \neq 0$ und bezeichne

$$h := f - c\,\mathrm{Id}_V\,.$$

Sei k die kleinste Zahl, sodass $h^k(u) = 0$ ist. Wegen $u \neq 0$ ist $k > 0$ und $h^{k-1}(u) \neq 0$. Unser Ziel ist, $k \leq n$ zu zeigen, woraus dann

$$h^n(u) = h^{n-k}(h^k(u)) = h^{n-k}(0) = 0$$

und $u \in \mathrm{Kern}(h^n)$ folgt. Um $k \leq n$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren

$$u, h(u), h^2(u), \ldots, h^{k-1}(u)$$

linear unabhängig sind. Seien dazu $d_0, \ldots, d_{k-1} \in K$ mit

$$d_0 u + d_1 h(u) + \cdots + d_{k-1} h^{k-1}(u) = 0\,. \tag{1}$$

Anwenden von h^{k-1} auf (1) ergibt
$d_0 h^{k-1}(u) = 0$, also $d_0 = 0$.
Anwenden von h^{k-2} auf (1) ergibt dann $d_1 h^{k-1}(u) = 0$, also $d_1 = 0$.
Auf diese Weise folgt $0 = d_0 = d_1 = \cdots = d_{k-1}$.

Definition 265 : Seien $g, h : V \to V$ K-lineare Funktionen. Dann heißen g und h „*vertauschbar*“, wenn

$$g \circ h = h \circ g$$

ist, d.h. die Reihenfolge des Anwendens von g und h spielt keine Rolle. Ein Untervektorraum U von V heißt *stabil* unter g, wenn $g(U) \subseteq U$ ist.

Hilfssatz 266 : *Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, $f : V \to V$ eine lineare Funktion und $a, c \in K$. Dann sind $f - a\,\mathrm{Id}_V$ und $f - c\,\mathrm{Id}_V$ vertauschbar.*

Beweis: Es ist
$(f - c\,\mathrm{Id}_V)(f - a\,\mathrm{Id}_V) = f \circ f - cf - af + ca\,\mathrm{Id}_V = (f - a\,\mathrm{Id}_V)(f - c\,\mathrm{Id}_V)$.

Satz 267 : *Sei $g : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion, die mit f vertauschbar ist. Dann sind die Eigenräume und die verallgemeinerten Eigenräume von f stabil unter g.*

Beweis: Sei c ein Eigenwert bzw. verallgemeinerter Eigenwert von f und u ein entsprechender Eigenvektor bzw. verallgemeinerter Eigenvektor. Weil f und g vertauschbar sind, sind auch $f - cId_V$ und $(f - cId_V)^n$ mit g vertauschbar. Daher ist

$$(f - cId_V)(g(u)) = g((f - cId_V)(u)) = g(0) = 0$$

bzw.

$$(f - cId_V)^n(g(u)) = g((f - cId_V)^n(u)) = g(0) = 0\,,$$

also ist auch $g(u)$ ein Eigenvektor bzw. verallgemeinerter Eigenvektor von f.

Satz 268 : *Seien $c_1, \ldots, c_\ell$ die Eigenwerte von f. Dann ist*

$$V(f, c_1) + \cdots + V(f, c_\ell) = V(f, c_1) \oplus \cdots \oplus V(f, c_\ell)\,,$$

d.h. die Summe der verallgemeinerten Eigenräume von f ist direkt.

Beweis: Seien $u_1 \in V(f, c_1), \ldots, u_\ell \in V(f, c_\ell)$ mit

$$u_1 + \cdots + u_\ell = 0\,.$$

Sei k die kleinste Zahl, sodass $(f - c_1\,\mathrm{Id}_V)^k(u_1) = 0$ ist, und

$$h := (f - c_1\,\mathrm{Id}_V)^{k-1}(f - c_2\,\mathrm{Id}_V)^n \ldots (f - c_\ell\,\mathrm{Id}_V)^n\,.$$

Nach Hilfssatz 266 kommt es bei der Funktion h nicht auf die Reihenfolge der Faktoren an. Anwenden von h auf $u_1 + \ldots + u_\ell$ ergibt

$$0 = h(u_1 + \ldots + u_\ell) = h(u_1) =$$

$$= (f - c_2\,\mathrm{Id}_V)^n \ldots (f - c_\ell\,\mathrm{Id}_V)^n (f - c_1\,\mathrm{Id}_V)^{k-1}(u_1)$$

nach Satz 264. Der Vektor $(f - c_1 \operatorname{Id}_V)^{k-1}(u_1)$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert c_1, also ist

$$0 = h(u_1) = (c_1 - c_2)^n \dots (c_1 - c_\ell)^n (f - c_1 \operatorname{Id}_V)^{k-1}(u_1),$$

woraus $u_1 = 0$ folgt. Analog zeigt man $u_j = 0$ für $2 \le j \le \ell$.

Hilfssatz 269 : *Seien U, U' Untervektorräume von V mit*

$$U \cap U' = \{0\}.$$

Dann ist die Summe $U + U'$ direkt.

Beweis: Seien $u \in U$ und $u' \in U'$ mit $u + u' = 0$. Dann ist $u = -u' \in U \cap U'$, also $u = 0 = u'$.

Satz 270 : *Sei $K = \mathbb{C}$ und $c_1, \dots, c_\ell$ die Eigenwerte von f. Dann ist*

$$V = V(f, c_1) + \dots + V(f, c_\ell).$$

Beweis: Wir zeigen durch Induktion nach n, dass die Behauptung für komplexe Vektorräume der Dimension $\le n$ gilt. Für $n = 0$ ist V der Nullraum, f die Nullfunktion, $\ell = 0$ und die leere Summe der Nullraum.

Sei nun $n \ge 1$ und die Behauptung gelte für Vektorräume der Dimension $\le n - 1$. Da $K = \mathbb{C}$ ist, hat f einen Eigenwert c_1. Sei

$$h := (f - c_1 \operatorname{Id}_V)^n \in \operatorname{Lin}_K(V, V).$$

Nach Satz 264 ist

$$\operatorname{Kern}(h) = V(f, c_1).$$

Sei $y \in \operatorname{Kern}(h) \cap \operatorname{Bild}(h)$. Dann gilt $h(y) = 0$ und es gibt es ein $x \in V$ mit $y = h(x)$. Daher ist $0 = h(y) = h^2(x) = (f - c_1 \operatorname{Id}_V)^{2n}(x)$, also $x \in V(f, c_1)$. Nach Satz 264 folgt $0 = h(x) = y$. Daher ist $\operatorname{Kern}(h) \cap \operatorname{Bild}(h) = \{0\}$ und nach Hilfssatz 269 die Summe von $\operatorname{Kern}(h)$ und $\operatorname{Bild}(h)$ direkt. Nach Satz 41 und Satz 15 folgt

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Kern}(h) \oplus \operatorname{Bild}(h)) &= \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Kern}(h)) + \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Bild}(h)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(V),\end{aligned}$$

also $\operatorname{Kern}(h) \oplus \operatorname{Bild}(h) = V$. Somit ist

$$V = V(f, c_1) \oplus W, \tag{2}$$

wobei $W := \operatorname{Bild}(h)$ eine kleinere Dimension als V hat. Nach Hilfssatz 266 gilt $fh = hf$. Für $y \in \operatorname{Bild}(h)$, d.h. $y = h(x)$ für ein $x \in V$, ist somit $f(y) = f(h(x)) = h(f(x))$, also $f(y) \in \operatorname{Bild}(h)$ und $f(W) \subset W$. Daher kann man f einschränken zur Funktion

$$g : W \to W, x \mapsto f(x).$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$W = V(g,a_1) + \cdots + V(g,a_m)\,, \tag{3}$$

wobei $a_1,\ldots,a_m$ die Eigenwerte von g sind. Jeder Eigenvektor u von g zum Eigenwert a ist wegen $f(u) = g(u) = au$ auch Eigenvektor von f zum Eigenwert a. Daher ist $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(g) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ und, für $1 \leq j \leq m$,

$$V(g,a_j) = \{x \in W \mid \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } (g - a_j \mathrm{Id}_W)^k(x) = 0\} \subset V(f,a_j)\,.$$

Zusammen mit (2) und (3) erhalten wir
$V \subset V(f,c_1) + \cdots + V(f,c_\ell)$, was zu zeigen war.

Satz 271: *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$, $f : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion und χ_f das charakteristische Polynom von f. Es ist*

$$\chi_f = \prod_{j=1}^{\ell} (X - c_j)^{m_j}\,,$$

wobei $c_1,\ldots,c_\ell$ die Eigenwerte von f mit den Vielfachheiten $m_1,\ldots,m_\ell$ sind. Dann ist

$$V = V(f,c_1) \oplus \cdots \oplus V(f,c_\ell)\,,$$

d.h. V ist die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume von f. Für $1 \leq j \leq \ell$ gilt

(1) $\dim_{\mathbb{C}}(V(f,c_j)) = m_j$
(2) $V(f,c_j) = \mathrm{Kern}((f - c_j \mathrm{Id}_V)^{m_j})$
(3) *$V(f,c_j)$ ist stabil unter f und die Einschränkung*

$$f_j : V(f,c_j) \to V(f,c_j)\,, x \mapsto f(x)\,,$$

hat nur einen Eigenwert, und zwar c_j.

Beweis: Für $1 \leq j \leq \ell$ sei $V_j := V(f,c_j)$ und $n_j := \dim_{\mathbb{C}}(V_j)$. Nach Satz 270 und Satz 268 ist V die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume V_j. Nach Satz 267 ist V_j stabil unter f. Da V_j den Eigenraum $E(f,c_j)$ enthält, ist c_j ein Eigenwert von f_j. Wenn a ein beliebiger Eigenwert von f_j ist, dann gibt es einen Vektor $u \in V_j$, $u \neq 0$, mit $f(u) = au$, woraus

$$(f - c_j \mathrm{Id}_V)^k(u) = (a - c_j)^k u$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, also $a = c_j$. Daher ist c_j der einzige Eigenwert von f_j und (3) bewiesen. Nach Satz 40 folgt

$$\chi_{f_j} = (X - c_j)^{n_j}\,.$$

Wählt man in jedem verallgemeinerten Eigenraum V_j eine Basis $(u_{j1},\ldots,u_{jn_j})$, dann kann man nach Satz 41 diese Basen zu einer Basis

$(u_{11},\dots,u_{\ell n_\ell})$ von V zusammensetzen. Da jeder verallgemeinerte Eigenraum stabil unter f ist, hat die Matrix von f bezüglich dieser Basis

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_\ell \end{pmatrix},$$

Blockdiagonalform, wobei B_j die Matrix von f_j bezüglich der Basis $(u_{j1},\dots,u_{jn_j})$ ist. Damit hat auch $cI_n - B$ Blockdiagonalform, und nach Satz 186 folgt

$$\begin{aligned}\chi_f = \chi_B = \det(cI_n - B) &= \det(cI_{n_1} - B_1)\dots\det(cI_{n_\ell} - B_\ell) \\ &= \chi_{B_1}\dots\chi_{B_\ell} = \chi_{f_1}\dots\chi_{f_\ell} = (X-c_1)^{n_1}\dots(X-c_\ell)^{n_\ell}\,.\end{aligned}$$

Somit ist $n_j = m_j$ für $1 \le j \le \ell$ und (1) bewiesen. Anwenden von Satz 270 und Satz 264 auf f_j gibt

$$V_j = V(f_j,c_j) = \operatorname{Kern}((f_j - c_j\operatorname{Id}_{V_j})^{m_j}) \subset \operatorname{Kern}((f - c_j\operatorname{Id}_V)^{m_j}) \subset V_j\,.$$

Daher ist $V_j = \operatorname{Kern}((f - c_j\operatorname{Id}_V)^{m_j})$ und (2) bewiesen.

§3. Die Jordansche Normalform komplexer Matrizen

Satz 272: *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ der Dimension $n \in \mathbb{N}$, $f : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion, $c_1,\dots,c_\ell$ die Eigenwerte von f mit den Vielfachheiten $m_1,\dots,m_\ell$ und*

$$V = V(f,c_1) \oplus \dots \oplus V(f,c_\ell)\,,$$

die Zerlegung von V in die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume von f.
$D_f : V \to V$ sei jene lineare Funktion, deren Einschränkung auf $V(f,c_j)$ gleich $c_j Id_{V(f,c_j)}$ ist, $1 \le j \le \ell$. Weiters sei $N_f := f - D_f$.
Dann ist D_f diagonalisierbar, $N_f^n = 0$ und

$$f = D_f + N_f\,,\ D_f \circ N_f = N_f \circ D_f\,,\ D_f \circ f = f \circ D_f\,,\ \ N_f \circ f = f \circ N_f\,.$$

(„Jordan-Zerlegung von f“, D_f ist der diagonalisierbare Summand *von f, N_f ist der* nilpotente Summand *von f).*

Beweis: Nach Satz 271 und Satz 267 genügt es, den Satz für $\ell = 1$ zu beweisen. In diesem Fall sind die Aussagen aber leicht nachzuprüfen.

Hilfssatz 273: *Sei $P : K \longrightarrow K$ eine Polynomfunktion mit Koeffizienten $a_0,a_1,\dots,a_n$. Dann sei*

$$P(f) := \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \in \operatorname{Lin}_K(V,V)$$

(„f eingesetzt in P“). Dabei sind die Potenzen f^i bezüglich der Zusammensetzung von Funktionen zu verstehen, insbesondere ist $f^0 = \mathrm{Id}_V$. Wenn Q eine weitere Polynomfunktion ist, dann gilt

$$(P+Q)(f) = P(f)+Q(f) \quad \textit{und} \quad (P\cdot Q)(f) = P(f)\circ Q(f)\,.$$

Beweis: Wir beweisen nur die zweite Aussage, die erste beweist man analog. Sei Q durch die endliche Folge $b_0, b_1, \ldots, b_m$ gegeben. Dann ist $P\cdot Q$ durch die Koeffizienten

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)_{0\le k\le m+n}$$

gegeben. Andererseits ist

$$\begin{aligned} P(f)\circ Q(f) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j f^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j f^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) f^k\,. \end{aligned}$$

Daher ist $(P\cdot Q)(f) = P(f)\circ Q(f)$.

Satz 274: *(Satz von Cayley-Hamilton)*
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion mit charakteristischem Polynom χ_f. Dann ist

$$\chi_f(f) = 0$$

in $\mathrm{Lin}_K(V,V)$.

Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_\ell$ die Eigenwerte von f mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_\ell$. Dann ist

$$\chi_f = \prod_{j=1}^{\ell}(X-c_j)^{m_j}\,,$$

nach Hilfssatz 273 somit

$$\chi_f(f) = \prod_{j=1}^{\ell}(f-c_j\,\mathrm{Id}_V)^{m_j}\,.$$

Für $x\in V$ gibt es nach Satz 271 Vektoren $x_1 \in V(f,c_1), \ldots, x_\ell \in V(f,c_\ell)$ mit $x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i$. Daraus folgt

$$\left(\prod_{j=1}^{\ell}(f-c_j\,\mathrm{Id}_V)^{m_j}\right)(x) = \sum_{i=1}^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell}(f-c_j\,\mathrm{Id}_V)^{m_j}\right)(x_i) = 0\,,$$

weil nach Hilfssatz 266 die Faktoren des Produkts vertauschbar sind und nach Satz 271 ist $(f-c_j\,\mathrm{Id}_V)^{m_j}(x_j) = 0$.

Definition 275 : Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$ und $a \in K$. Dann heißt die Matrix

$$J(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in K^{m \times m}$$

ein *Jordankästchen* der Größe m mit Diagonalelement a.

Definition 276 : Eine Matrix hat *Jordansche Normalform*, wenn sie Blockdiagonalform

$$D = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_p \end{pmatrix}$$

mit Jordankästchen $J_1, \dots, J_p$ in der Hauptdiagonalen hat.

Satz 277 : *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion. Dann gibt es eine Basis $\underline{u}$ von V, sodass die Matrix von f bezüglich $\underline{u}$ Jordansche Normalform mit Jordankästchen $J_1, \dots, J_p$ entlang der Hauptdiagonalen hat. Die Jordankästchen $J_1, \dots, J_p$ sind eindeutig bis auf die Reihenfolge.*

Die Funktion f ist genau dann diagonalisierbar, wenn jedes Jordankästchen die Größe 1 hat. Jede Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform.

Die Basis $\underline{u}$ heißt Jordanbasis *von f.*

Beispiel 278 : Für komplexe 3×3-Matrizen sind die folgenden Jordanschen Normalformen möglich:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} .$$

Dabei sind a, b, c (nicht notwendig verschiedene) komplexe Zahlen.

Beweis: Wir zeigen in Teil (1), dass die Jordankästchen eindeutig bis auf die Reihenfolge sind. In Teil (2) konstruieren wir dann eine Jordanbasis von f.

(1) Sei $n := \dim_{\mathbb{C}}(V)$ und $\underline{u}$ eine Basis von V so, dass die Matrix D von f bezüglich $\underline{u}$ Blockdiagonalform mit Blockgrößen $(n_1, \dots, n_p)$ hat, wobei in der Diagonale die Jordankästchen $J_1, \dots, J_p$ mit Diagonalelementen

$a_1, \ldots, a_p$ stehen. Nach Satz 186 ist

$$\chi_f = \chi_D = \prod_{k=1}^{p} \chi_{J_k} = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k}\,, \tag{4}$$

also $\{a_1, \ldots, a_p\} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$. Für $c \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ und $m \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne

$$b_m(c)$$

die Anzahl der Jordankästchen mit Größe m und Diagonalelement c in der Matrix D. Wir zeigen nun, dass für jedes $c \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ die Zahlen $b_1(c), \ldots, b_n(c)$ durch f eindeutig bestimmt sind, woraus die Eindeutigkeit der Jordankästchen bis auf die Reihenfolge folgt. Dazu schreiben wir entsprechend der Blockdiagonalform von D

$$\underline{u} = (u_{kj})_{\substack{1 \le k \le p \\ 1 \le j \le n_k}}\,,$$

sodass für $1 \le k \le p$

$$(f(v_{k1}), \ldots, f(v_{kn_k})) = (v_{k1}, \ldots, v_{kn_k}) \begin{pmatrix} a_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_k & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

gilt. Im Folgenden wählen wir $c \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ fest und setzen

$$g := f - c\,\mathrm{Id}_V$$

sowie $W_\ell := \mathrm{Kern}(g^\ell)$ für $0 \le \ell \le n$. Dann ist nach Satz 264

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = V(f, c)\,.$$

Für alle $k \in \{1, \ldots, p\}$ mit $a_k = c$ erhält man aus (5)

$$\begin{aligned} g(u_{kn_k}) &= u_{k,n_k-1} \\ g(u_{k,n_k-1}) &= u_{k,n_k-2} \\ &\ldots \\ g(u_{k2}) &= u_{k1} \\ g(u_{k1}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Für $1 \le \ell \le n$ setzen wir

$$I_\ell := \{k \in \{1, \ldots, p\} \mid a_k = c \text{ und } n_k \ge \ell\}\,,$$

sodass die J_k mit $k \in I_\ell$ alle Jordankästchen von D mit Diagonalelement c und Größe $\ge \ell$ sind und daher

$$\#(I_\ell) = \sum_{m=\ell}^{n} b_m(c) \tag{7}$$

ist. Wegen (6) ist

$$U_\ell := {}_K\langle v_{k\ell} \mid k \in I_\ell \rangle$$

ein Untervektorraum von W_ℓ. Weiters gilt $U_\ell \cap W_{\ell-1} = \{0\}$, weil für eine Koeffizientenfamilie $(d_k)_{k\in I_\ell}$ mit $\sum_{k\in I_\ell} d_k v_{k\ell} \in W_{\ell-1}$ wegen (6)

$$0 = \sum_{k\in I_\ell} d_k g^{\ell-1}(v_{k\ell}) = \sum_{k\in I_\ell} d_k v_{k1}$$

und $d_k = 0$ für alle $k \in I_\ell$ folgt. Nach Hilfssatz 269 ist die Summe von U_ℓ und $W_{\ell-1}$ direkt. Aus $U_\ell \oplus W_{\ell-1} \subset W_\ell$ folgt

$$\dim_{\mathbb{C}}(U_\ell) + \dim_{\mathbb{C}}(W_{\ell-1}) \le \dim_{\mathbb{C}}(W_\ell)$$

und wegen (7) ist

$$\alpha_\ell := \sum_{m=\ell}^{n} b_m(c) \le \dim_{\mathbb{C}}(W_\ell) - \dim_{\mathbb{C}}(W_{\ell-1}) =: \beta_\ell \tag{8}$$

für $1 \le \ell \le n$. Es ist

$$\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} (\dim_{\mathbb{C}}(W_\ell) + \dim_{\mathbb{C}}(W_{\ell-1})) = \dim_{\mathbb{C}}(V(f,c))\,.$$

Weiters ist

$$\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=\ell}^{n} b_m(c) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} b_m(c) = \sum_{m=1}^{n} m b_m(c)\,.$$

Nach Definition von $b_m(c)$ und Satz 271 ist $\sum_{m=1}^{n} m b_m(c)$ gleich der Dimension von $V(f,c)$. Also ist

$$\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell$$

und wegen $0 \le \alpha_\ell \le \beta_\ell$ daher auch $\alpha_\ell = \beta_\ell$ für $1 \le \ell \le n$. Wegen

$$\begin{aligned} b_\ell(c) &= \alpha_\ell - \alpha_{\ell+1} = \beta_\ell - \beta_{\ell+1} = \\ &= 2\dim_{\mathbb{C}}(W_\ell) - \dim_{\mathbb{C}}(W_{\ell-1}) - \dim_{\mathbb{C}}(W_{\ell+1}) \end{aligned}$$

ist $b_\ell(c)$ durch f eindeutig bestimmt.

(2) Um eine Jordanbasis von f zu konstruieren, genügt es nach Satz 271, für $1 \le j \le \ell$ eine Jordanbasis für die Einschränkung von f auf den verallgemeinerten Eigenraum $V(f,c_j)$ zu konstruieren und diese Basen dann zusammenzusetzen. Sei im Folgenden $c \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ fest gewählt, $W := V(f,c)$ und

$$g : W \to W\,, x \mapsto f(x) - cx\,.$$

Im Rest des Beweises konstruieren wir eine Jordanbasis von g. Diese Basis ist dann auch eine Jordanbasis der Einschränkung von f auf W. Sei m die Vielfachheit des Eigenwerts c, und für $0 \le k \le m$ sei $W_k := \mathrm{Kern}(g^k)$. Dann ist nach Satz 271

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_m = W\,.$$

Für den weiteren Beweis brauchen wir folgendes Hilfssatz.

Hilfssatz 279: *Für alle* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *ist*

$$g(W_k) \subset W_{k-1}\,.$$

Sei Z *ein Untervektorraum von* W_ℓ *für ein* $\ell \in \{2, \ldots, m\}$ *mit*

$$Z \cap W_{\ell-1} = \{0\}\,.$$

Dann ist auch

$$g(Z) \cap W_{\ell-2} = \{0\}\,,$$

und die Funktion $Z \to g(Z)\,, x \mapsto g(x)\,,$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Für $x \in W_\ell$ ist $g^{\ell-1}(g(x)) = g^\ell(x) = 0$, also $g(x) \in W_{\ell-1}$ und damit $g(W_\ell) \subset W_{\ell-1}$.

Für $y \in g(Z) \cap W_{\ell-2}$ gibt es ein $x \in Z$, sodass $y = g(x)$ ist. Wegen $0 = g^{\ell-2}(y) = g^{\ell-1}(x)$ ist $x \in Z \cap W_{\ell-1}$, also $x = 0$ und $y = 0$. Daher ist $g(Z) \cap W_{\ell-2} = \{0\}$.

Die Funktion $h : Z \to g(Z)\,, x \mapsto g(z)\,,$ ist linear und surjektiv. Wegen $\mathrm{Kern}(h) = \mathrm{Kern}(g) \cap Z = W_1 \cap Z \subset W_{\ell-1} \cap Z = \{0\}$ ist h injektiv und ein Isomorphismus.

Wir setzen den Beweis von Satz 277 fort und wählen sukzessive Untervektorräume $U_m \subset W_m$, $U_{m-1} \subset W_{m-1}$,$\ldots$,$U_1 \subset W_1$, sodass

$$\begin{aligned}
W_m &= W_{m-1} \oplus U_m \\
W_{m-1} &= W_{m-2} \oplus g(U_m) \oplus U_{m-1} \\
W_{m-2} &= W_{m-3} \oplus g^2(U_m) \oplus g(U_{m-1}) \oplus U_{m-2} \\
&\cdots \\
W_1 &= W_0 \oplus g^{m-1}(U_m) \oplus g^{m-2}(U_{m-1}) \oplus \cdots \oplus g(U_2) \oplus U_1
\end{aligned} \tag{9}$$

ist. Dies ist möglich, weil für $2 \le \ell \le m$ nach Wahl von $U_m, \ldots, U_\ell$

$$W_\ell = W_{\ell-1} \oplus Z$$

mit

$$Z := g^{m-\ell}(U_m) \oplus g^{m-\ell-1}(U_{m-1}) \oplus \cdots \oplus g(U_{\ell+1}) \oplus U_\ell$$

gilt und aus Hilfssatz 279

$$W_{\ell-1} \supset W_{\ell-2} \oplus g(Z)$$

sowie

$$g(Z) = g^{m-\ell+1}(U_m) \oplus g^{m-\ell}(U_{m-1}) \oplus \cdots \oplus g(U_{\ell+2}) \oplus U_{\ell+1}$$

folgen. Weiters wählen wir für $1 \le \ell \le m$ eine Basis $(u_{\ell 1}, \ldots, u_{\ell n_\ell})$ von U_ℓ. Dann ist nach Hilfssatz 279 für $0 \le k < \ell$

$$(g^k(u_{\ell 1}), \ldots, g^k(u_{\ell n_\ell}))$$

eine Basis von $g^k(U_\ell)$. Aus (9) folgt

$$W = U_1 \oplus (g(U_2) \oplus U_2) \oplus \cdots \oplus (g^{m-1}(U_m) \oplus \cdots \oplus g(U_m) \oplus U_m)\,.$$

Somit kann man eine Basis $\underline{w}$ von W aus den Familien

$$\underline{v_{\ell i}} := (g^{\ell-1}(u_{\ell i}), g^{\ell-2}(u_{\ell i}), \ldots, g(u_{\ell i}), u_{\ell i})$$

mit $1 \leq \ell \leq m$ und $1 \leq i \leq n_\ell$ zusammensetzen. Wegen

$$g(\underline{v_{\ell i}}) = \underline{v_{\ell i}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\underline{w}$ eine Jordanbasis von g und der Beweis zu Ende.