Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2011/12

8. November 2011

24) Was ist ein *System linearer Gleichungen*? Was ist die *Lösungsmenge* eines solchen Systems und welche Eigenschaften hat diese?

Zeigen Sie, dass die folgende Aufgabe als System linearer Gleichungen aufgefasst werden kann (Durch welche Matrix und welche Spalte ist dieses System linearer Gleichungen gegeben? Was ist gesucht? Sie brauchen das System aber nicht zu lösen.): Bezüglich einer Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sind die Bilder von $-2, 0$ und 1 bekannt: $f(-2) = 2$, $f(0) = 1$ und $f(1) = 3$. Wir nehmen an, dass die Funktion f die folgende Eigenschaft hat: Es gibt rationale Zahlen a, b, c so, dass für alle rationalen Zahlen y das Bild $f(y)$ von y bezüglich f gleich $ay^2 + by + c$ ist. Gesucht sind alle solchen Tripel (a, b, c). („Quadratische Interpolation“).

25) Was ist ein *Vektorraum*? Was ist ein *Untervektorraum* eines Vektorraums? Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ (über $\mathbb{Q}$) aller rationalen 3×3-Matrizen?

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A \text{ invertierbar } \} \ ,$$

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{12} - A_{22} + A_{31} - A_{21} = 0\} \ ,$$

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{11} + A_{22} + A_{33} = 1\} \ ,$$

$$\{E_{13} + 2aE_{21} - bE_{33} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \ ,$$

$$\{sE_{12} - tE_{31} + uE_{23} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid s, t, u \in \mathbb{Q}\} \ .$$

(Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).

26) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen dieses Untervektorraums.

27) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

28) A sei eine Matrix in Stufenform. Wie berechnet man eine Basis von $L(A,0)$? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.
Bestimmen Sie für alle Matrizen A in Aufgabe 27, die Stufenform haben, eine Basis (über $\mathbb{Q}$) von $L(A,0)$.

29) A sei eine Matrix in Stufenform und (A,b) ein System linearer Gleichungen. Wie entscheidet man, ob dieses System eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an? Erläutern Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rationale Matrizen. Überprüfen Sie, ob $L(A,b)$ bzw. $L(A,c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des rationalen Vektorraums $L(A,0)$. Schreiben Sie damit die Lösungsmenge $L(A,b)$ an. Wie kann man weitere 100 Lösungen anschreiben?