Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2011/12

28. bzw. 29. November 2011

48) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann stehen zwei Vektoren *zueinander senkrecht* oder *orthogonal*?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren und überprüfen Sie, welche dieser Vektoren zueinander senkrecht stehen:

$$(2,3,-1),\ (0,1,3),\ (2,1,-1),\ (3,1,-7)\,.$$

49) Gibt es ein Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$ so, dass dessen Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ist? Wenn ja, berechnen Sie die Abstände zwischen je zwei der Vektoren von Aufgabe 48 bezüglich dieses neuen Skalarproduktes.

50) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und a, b, c drei verschiedene Punkte in V, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zwei Geraden $p + \mathbb{R}\,v$ und $q + \mathbb{R}\,w$ *stehen zueinander senkrecht* oder *normal*, wenn v und w zueinander senkrecht stehen. A bzw. B bzw. C sei die Gerade durch a bzw. b bzw. c, die senkrecht zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht.
Zeigen Sie: $A \cap B \cap C$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt“).
Hinweis: Sie können annehmen, dass $a = 0$ ist und (b, c) eine Basis von V ist.

51) Was ist eine *Orthonormalbasis*? Wie können die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis berechnet werden?
Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aller reellen Spalten mit 2 bzw. 3 Zeilen. Zeigen Sie, dass die Spalten der folgenden Matrizen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind:

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Orthonormalbasis.

52) Zeigen Sie: Wenn W ein Untervektorraum eines euklidischen Raumes $(V, \langle -, - \rangle)$ ist, dann ist die Einschränkung von $\langle -, - \rangle$ auf $W \times W$ ein Skalarprodukt auf W. Mit diesem Skalarprodukt ist W ein euklidischer Raum.
Es sei W der von $(1, -1, 2)$ und $(2, 1, 1)$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten W mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes (auf $\mathbb{R}^3$) als euklidischen Raum. Zeigen Sie, dass $(\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2), \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0))$ eine Orthonormalbasis von W ist. Berechnen Sie die Koordinaten von
$2(1, -1, 2) + 3(2, 1, 1)$ bezüglich dieser Orthonormalbasis.

53) G sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ und E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Der Durchschnitt $G \cap E$ kann leer, ein Punkt oder die Gerade G sein. Erläutern Sie, wie man $G \cap E$ berechnet, wenn
(a) G und E in impliziter Form
(b) G und E in Parameterform
(c) G in Parameterform und E in impliziter Form
(d) G in impliziter Form und E in Parameterform
gegeben sind.