Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2011/12

21. bzw. 22. November 2011

42) Was ist die *Dimension* eines Vektorraums? Was ist der *Rang* einer Matrix? Wie berechnet man damit die Dimension des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen? Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Dimension des Lösungsraums des durch diese Matrix gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

43) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis?
Zeigen Sie, dass $((3, 2), (-3, 1))$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von $(1, 1)$, $(1, 3)$, und von $(2, 3)$ bezüglich dieser Basis.
Zeigen Sie, dass

$$(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$$

eine Basis von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten der vier Standardmatrizen von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ bezüglich dieser Basis.

44) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $(v_1, \dots v_k)$ ein k-Tupel von Vektoren in V. Ergänzen Sie den folgenden Satz: Wenn $(v_1, \dots v_k)$ ein Erzeugendensystem bzw. linear unabhängig bzw. eine Basis ist, dann muss $k \dots$ bzw. $k \dots$ bzw. $k \dots$ sein.
Verwenden Sie Satz 103 zur Beantwortung der folgenden Fragen:
Welche der folgenden k-Tupel ($k = 5$ bzw. 3 bzw. 4 bzw. 3) sind Basen von $\mathbb{Q}^3$, welche sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^3$?
Wählen Sie aus den Erzeugendensystemen eine Basis aus und ergänzen Sie die linear unabhängigen k-Tupel zu einer Basis!

$$((1, 0), (1, 1), (2, 1), (1, -1), (0, 1)),$$

$$((1, 1, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 0)), \quad ((1, 1, -2), (0, 1, 0), (2, 4, -4)),$$

$$((4,8),(0,0),(-7,-14),(3,6)),$$
$$((1,0,1),(0,1,2),(1,1,3)),\quad ((1,0,0),(0,2,1),(0,0,1)).$$

45) Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Sei E dieser Vektorraum. Welche Untervektorräume von E gibt es? Skizzieren Sie diese Untervektorräume. Beschreiben Sie geometrisch die Bedingungen, dass ein n-Tupel von Punkten linear unabhängig ist, dass ein n-Tupel von Punkten den Vektorraum E erzeugt und dass ein n-Tupel von Punkten eine Basis von E ist! Wählen Sie drei vom Nullpunkt verschiedene Punkte A, B, C und zeichnen Sie $(A+B)+C$, $A+(B+C)$, $2A$ und $A-B$!

46) Was ist ein *affiner Unterraum* eines Vektorraums? Was ist eine *Gerade* in einem Vektorraum? Es sei G die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(3,-5)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(2,1)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(4,-1)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(2,\frac{3}{5})$ parallel ist. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H.

Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d, e, f so, dass
$$G = \{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = c\}$$
und
$$H = \{(x_1, x_2) \mid |dx_1 + ex_2 = f\}$$
ist. (Dabei sollen die Zahlen a, b, d, e eigentlich nicht berechnet, sondern direkt hingeschrieben werden). Was ist dann $\{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = 0\}$ und $\{(x_1, x_2) \mid dx_1 + ex_2 = 0\}$? Berechnen Sie schließlich die Lösungsmenge des durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ und die Spalte $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ gegebenen Systems linearer Gleichungen.

47) Wie kann man (ähnlich wie in Aufgabe 46) nach Wahl eines Nullpunktes den „Anschauungsraum“ in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Sei V dieser Vektorraum. Welche Untervektorräume von V gibt es? Skizzieren sie diese Untervektorräume. Beschreiben Sie geometrisch die Bedingungen, dass ein n-Tupel von Punkten linear unabhängig ist, dass ein n-Tupel von Punkten den Vektorraum V erzeugt und dass ein n-Tupel von Punkten eine Basis von V ist!