Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2011/12

14. bzw. 15. November 2011

36) Durch welche (endlich vielen) Daten wird die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen beschrieben? Erläutern Sie den *Gauß-Algorithmus* zur Berechnung dieser Daten. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge des durch (A, b) und des durch (A, c) gegebenen Systems linearer Gleichungen.

37) „In vier Räumen A, B, C, D befinden sich Bienen. Vom größten Raum A gibt es Öffnungen zu den kleineren Räumen B, C, D. Weiters gibt es eine Öffnung zwischen B und C. Innerhalb einer Minute fliegen je 20 Prozent der (sich in A befindenden) Bienen von A in die Räume B, C, D. Fünfunddreißig Prozent der Bienen in D fliegen nach A, von B je 30 Prozent nach A und C, von C je 25 Prozent nach A und B. In einer Minute können die Bienen in höchstens *einen* anderen Raum fliegen. Nach einer Minute sind 170 Bienen in A, 104 Bienen in B, 112 Bienen in C und 114 Bienen in D. Wieviele Bienen waren am Anfang in diesen Räumen?“
Beschreiben Sie diese Aufgabe durch ein System linearer Gleichungen und berechnen Sie eine Lösung. Wieviele Bienen werden nach zwei und nach drei Minuten in jedem Raum sein?

38) Was ist die zu einer Matrix *inverse Matrix*? Erläutern Sie, wie man überprüft, ob eine Matrix invertierbar ist und - wenn ja - wie man die dazu inverse Matrix berechnet. Überprüfen Sie, ob die Matrizen

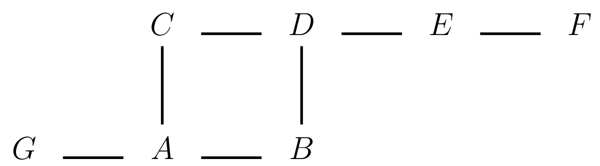
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4},$$

invertierbar sind und berechnen Sie - wenn ja - die dazu inverse Matrix.

39) Die folgende Aufgabe ist einem Lehrbuch für die erste Klasse technischer Fachschulen (HTL bzw. Gewerbeoberschule) entnommen. Das System linearer Gleichungen (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) ist durch die Matrix, die von den ersten drei Spalten von A gebildet wird, und durch die letzte Spalte von A gegeben.
Aus: Timischl, W., Kaiser, W.: Ingenieur-Mathematik 1.
E. Dorner Verlag, Wien, 6. Auflage, 2007.
Aufgabe 7.73: Von einem linearen Gleichungssystem in 3 Variablen ist die erweiterte Matrix gegeben. Bestimme die Konstanten a und b, sodass das Gleichungssystem a) eine eindeutige Lösung, b) keine Lösung, c) unendlich viele Lösungen besitzt.

$$(3)\ A := \begin{pmatrix} -6 & 2 & -12 & 6 \\ -4 & a & -11 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & b \end{pmatrix}$$

40) Ein Metallgitter der Form



wurde erhitzt. Für die Gitterpunkte A, B, C, D, E soll gelten: Die Temperatur (in Celsiusgraden gemessen) in einem Gitterpunkt ist der Mittelwert der Temperaturen der benachbarten Gitterpunkte (also die Summe der Temperaturen geteilt durch die Anzahl der benachbarten Gitterpunkte). Berechne die Temperaturen in A, B, C, D, E unter der Annahme, dass die Temperaturen in F und G bekannt sind. Kann zu jeder Temperatur in F die Temperatur in G so gewählt werden, dass die Temperatur in C Null ist?

41) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums?
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ bilden und schreiben Sie u und v als Linearkombinationen dieser Basisvektoren.