Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2011/12

7. bzw. 8. November 2011

30) Schreiben Sie die folgenden Produkte von Matrizen mit Spalten als Linearkombination der Spalten der Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 11 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie die folgende Linearkombination als Produkt einer Matrix mit einer Spalte an:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

31) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32) A sei eine rationale Matrix in Stufenform mit m Zeilen und n Spalten. Begründen Sie:
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn die letzte Zeile von A nicht nur Nullen enthält.
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann eine Basis von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn A die Einheitsmatrix ist.

33) A sei eine Matrix in Stufenform. Wie berechnet man eine Basis von $L(A,0)$? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.
Bestimmen Sie für alle Matrizen A in Aufgabe 31, die Stufenform haben, eine Basis (über $\mathbb{Q}$) von $L(A,0)$.

34) Beschreiben Sie, welche (endlich vielen) Ausgabedaten bei den folgenden zwei Aufgaben zu berechnen sind. Beschreiben Sie die Eingabedaten durch eine Matrix A und eine Spalte b mit jeweils einer Zeile.
   - Gegeben seien die rationalen Zahlen a,b,c. Beschreiben Sie die Menge aller Paare von rationalen Zahlen (x,y), für die $ax+by=c$ ist.
   - Gegeben seien die rationalen Zahlen r,s,t,u. Beschreiben Sie die Menge aller Tripel von rationalen Zahlen (x_1,x_2,x_3), für die $rx_1+sx_2+tx_3=u$ ist.

   Welche Bedingungen müssen die Zahlen a,b bzw. r,s,t erfüllen, damit die Matrix A Stufenform hat? Schreiben Sie in diesem Fall die gesuchten Daten an, ohne irgendeine Rechnung auszuführen. Was muss man tun, wenn die Matrix A nicht Stufenform hat?

35) A sei eine Matrix in Stufenform und (A,b) ein System linearer Gleichungen. Wie entscheidet man, ob dieses System eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.
Es seien

$$A:=\begin{pmatrix}0&1&0&4&1&0\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b:=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\5\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad c:=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\0\end{pmatrix}$$

rationale Matrizen. Überprüfen Sie, ob $L(A,b)$ bzw. $L(A,c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des rationalen Vektorraums $L(A,0)$. Schreiben Sie damit die Lösungsmenge $L(A,b)$ an. Wie kann man weitere 100 Lösungen anschreiben?