

**Proseminar Einführung in die Mathematik 1**  
**WS 2011/12**

**24./25. Oktober 2011**

18) Was ist eine *Matrix*? Beschreiben Sie die folgenden Situationen jeweils durch eine Matrix:

- Für die Herstellung der Produkte W, X, Y, Z stehen zwei Maschinen A, B zur Verfügung. Die Maschine A braucht 7 bzw. 6 bzw. 9 bzw. 8 Sekunden für die Produktion von W bzw. X bzw. Y bzw. Z; die Maschine B braucht dafür 6 bzw. 6 bzw. 5 bzw. 5 Sekunden.

Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wobei aber die Produktionszeiten in Minuten angegeben werden?

- Es seien  $a, b, c, d, e$  Orte,  $a$  ist von  $b$  9 km entfernt,  $d$  ist von  $b$  12 km entfernt,  $a$  ist von  $c$  13 km entfernt,  $c$  ist von  $e$  8 km entfernt,  $c$  ist von  $b$  9 km entfernt,  $a$  ist von  $e$  11 km entfernt,  $c$  ist von  $d$  12 km entfernt,  $d$  ist von  $e$  8 km entfernt,  $a$  ist von  $d$  14 km entfernt,  $e$  ist von  $b$  11 km entfernt.

19) Wie ist die *Addition von Matrizen* definiert? Wie multipliziert man eine rationale Zahl mit einer rationalen Matrix? Berechnen Sie die rationalen Matrizen

$$\frac{-2}{11}A + \frac{6}{5}B \quad \text{und} \quad \frac{3}{7}A - \frac{4}{9}B,$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -\frac{12}{24} & -\frac{51}{17} & -2 \end{pmatrix}$$

ist.

- 20) Wie ist *das Produkt von zwei Matrizen* definiert? Bilden Sie alle möglichen Produkte von je zwei der folgenden rationalen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 1 & \frac{-2}{5} & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ \frac{1}{4} & 11 \end{pmatrix}, \left(2 \ \frac{5}{8}\right), \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{17} & 5 & \frac{33}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- 21) Was ist eine *Standardmatrix*? Was ist eine *Elementarmatrix*? Wählen Sie für jeden der drei Typen von rationalen  $3 \times 3$ -Elementarmatrizen je zwei Beispiele.

Multiplizieren Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2\pi & 0 \\ 3 & \pi \end{pmatrix}$$

von links mit jeder dieser 6 Matrizen. Beschreiben Sie in Worten, wie sich diese zwei Matrizen dabei verändern.

- 22) Was sind *elementare Zeilenumformungen*? Beschreiben Sie den Zusammenhang von elementaren Zeilenumformungen und Elementarmatrizen.

Berechnen Sie Elementarmatrizen  $P, Q, R \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$  so, dass für alle Matrizen  $A \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$  die Matrix  $PA$  bzw.  $QA$  bzw.  $AR$  jene Matrix ist, die man aus  $A$  durch

- Subtraktion der 3-fachen vierten Zeile von  $A$  von der ersten Zeile von  $A$  erhält bzw.
- Multiplikation der dritten Zeile von  $A$  mit  $\frac{1}{2}$  erhält bzw.
- Vertauschung der zweiten und dritten Spalte von  $A$  erhält.

- 23) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $A$  die zu  $C$  und  $B$  die zu  $D$  inverse Matrix ist. Berechnen Sie dann die zu  $A \cdot B$  und  $B \cdot A$  inversen Matrizen.