

Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

30. bzw. 31. Jänner 2012

- 84) Was ist eine *komplexe Zahl*? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d so, dass

$$\left(3 - \frac{2}{5}i\right)^{-1} = a + bi$$

und

$$(7 + 8i)(9 - 4i) = c + di$$

ist. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft $z^2 = -3 + 4i$.

- 85) Berechnen Sie die Eigenwerte in \mathbb{C} und die entsprechenden Eigenräume ($\leq \mathbb{C}^{2 \times 1}$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 86) Was ist eine *lineare Funktion*? Welche der folgenden Funktionen sind linear?

$$f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, a \mapsto a^3 + a^2 + a,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto (-2z + 1)^2 - 4z^2 - 1,$$

$$h : \mathbb{Q}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{Q}, A \mapsto \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} A_{ij},$$

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto 2z + 3,$$

$$k : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (a, b) \mapsto (3a - b + 1, 2a + 4b).$$

$$\ell : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (m, n) \mapsto (m + n, m - 2n).$$

- 87) Was ist der *Graph* einer Funktion? Skizzieren Sie die Graphen der folgenden linearen Funktionen:

$$\begin{aligned}a &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto -3z, \\b &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - 2y, \\c &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto (3z, -z), \\d &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, -x).\end{aligned}$$

- 88) Eine Firma stellt drei Produkte A, B und C her. Wir schreiben (a, b, c) für „a Einheiten des Produktes A, b Einheiten des Produktes B und c Einheiten des Produktes C“. Die Funktion $f: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ ordnet jedem Tripel (a, b, c) das Paar (Preis in Euro von (a, b, c) , Gewinn der Firma in Euro beim Verkauf von (a, b, c)) zu.

Wir nehmen an, dass f linear ist. Ist das sinnvoll?

Jemand weiß, dass $f((2, 1, 1)) = (263, 61)$,

$f((3, 1, 2)) = (393, 95)$, $f((2, 3, 1)) = (387, 85)$ ist. Kann man daraus den Preis von je einer Einheit des Produktes A bzw. B bzw. C und den Gewinn der Firma beim Verkauf von je einer Einheit des Produktes A bzw. B bzw. C berechnen?

- 89) Was ist ein *Isomorphismus von Vektorräumen*?

Es sei G die Gerade durch $(0, 0, 0)$ und $(1, 2, -1)$ in \mathbb{R}^3 und E die Ebene durch $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 3)$ und $(0, 2, 1)$ in \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass die Funktion p von \mathbb{R}^3 nach E , die jedem Tripel (a, b, c) den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden $(a, b, c) + G$ zuordnet, linear ist. Kann man das geometrisch interpretieren? Zeigen Sie, dass das Bild einer Geraden in \mathbb{R}^3 unter p eine Gerade oder ein Punkt in E ist.

Zeigen Sie, dass die Einschränkung q von p auf den von $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ erzeugten Untervektorraum ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.