Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

23. bzw. 24. Jänner 2012

78) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert c? Überprüfen Sie, ob eine oder mehrere der Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 15 & \frac{39}{2} & 0 & 8 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{23}{2} & -\frac{39}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Eigenwerte.

79) Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} -6 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

80) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

81) Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Zeigen Sie:
Genau dann ist 0 ein Eigenwert von A, wenn A nicht invertierbar ist. Wenn A invertierbar ist und $c \in K$ ein Eigenwert von A ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} und die Eigenräume von A zum Eigenwert c und von A^{-1} zum Eigenwert c^{-1} sind gleich.
Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

inversen Matrix.

82) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & \frac{80}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Falls N bzw. M eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}NS$ bzw. $T^{-1}MT$.

83) Wie kann man schnell hohe Potenzen einer Matrix berechnen, wenn man eine Eigenbasis von dieser kennt? Berechnen Sie eine Eigenbasis der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

und dann die hunderttausendste Potenz dieser Matrix.