Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

16. bzw. 17. Jänner 2012

72) Es sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A mit $A_{ij} := i.n + j$, $1 \leq i, j \leq n$.
Hinweis: Schreiben Sie diese Matrix für $n = 1, 2, 3, 4$ an!

73) Wie kann man mit Hilfe der Determinante einer quadratischen Matrix entscheiden, ob diese invertierbar ist? Welche der folgenden reellen 2×2-Matrizen ist invertierbar? Versuchen Sie, das mit möglichst wenig Rechenaufwand zu entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 197,568 & 349,344 \\ 231,456 & -445,122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 325 & 689 \\ 138 & 261 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3,42.10^5 & 1,67.10^6 \\ 0,54.10^4 & 1,23.10^5 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

invertierbar.

74) Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Was ist das Vektorprodukt zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch die Standardbasis orientiert. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte

$$v := (2, 0, 1) \times (-1, 2, -1), \quad v \times (2, 1, 1),$$

und

$$(2, 0, 1) \times ((-1, 2, -1) \times (2, 1, 1)).$$

75) Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert? Zeigen Sie: Wenn n Vektoren in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige (bzw. rationale) Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze (bzw. rationale) Zahl. Ergänzen Sie die Fläche des Parallelogramms mit den Eckpunkten $(1,3),(-1,1),(2,-1)$ auf drei verschiedene Weisen zu einem Parallelogramm und berechnen Sie dessen Fläche. Wählen Sie dazu das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

76) Berechnen Sie im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt das Volumen des von

$$((1,3,2,4),\ (2,1,0,-1),\ (1,2,-2,1),\ (2,-2,2,1))$$

erzeugten Parallelotops und die Fläche des von $((2,-2,1,3)$ und $(2,1,-1,0)$ erzeugten Parallelogramms.

77) Was ist das Vektorprodukt zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Es seien $v := (3,1,1) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis als orientierten euklidischen Raum. Berechnen Sie $v \times w$, die Fläche des von v und w erzeugten Parallelogramms, den Abstand von $(-1,2,3)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, v und w enthält, und den Sinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}w$.