Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2011/12

9. bzw. 10. Jänner 2012

66) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?
Die Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien durch

$$f(r) := |r| + r \ , \ g(r) := 3r - 3|r| \ , \ h(r) := 18r|r| \ , \ (r \in \mathbb{Q}),$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$(f+g)^2 = f^2 + g^2$;
$9f^2 - g^2 = 2h$;
$(f+g)^3 = f^3 + 222f^2 \cdot g + 22f \cdot g^2 + g^3$;
$(f \cdot h - g)^2 = h^2 + g$;
$f + g \cdot h = h - g \cdot f$.

67) Was ist eine *Polynomfunktion*? Berechnen Sie $f(\frac{3}{4})$ für

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \ z \longmapsto -1 + 2z - 5z^2 + z^4 + 3z^6 - 4z^7 .$$

Wieviele Multiplikationen (von rationalen Zahlen) sind dazu nötig?
Zeigen Sie, dass jede Funktion von $\mathbb{Z}_2$ nach $\mathbb{Z}_2$ eine Polynomfunktion (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$) ist. (Hinweis: Wieviele Funktionen von $\mathbb{Z}_2$ nach $\mathbb{Z}_2$ gibt es ?)

68) Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der dritten Zeile von A zur zweiten erhält.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $3A$ das 27-fache der Determinante von A ist.

69) Erläutern Sie das in Satz 183 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \;\; B := \begin{pmatrix} 1 & 34567 & 2 & 1 \\ -3 & 99991 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -555555 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dann die Determinanten von

$$2A, \;\; A^2 \cdot B \quad \text{und von} \quad -B\,.$$

70) Welche Eigenschaften der Determinante wurden in der Vorlesung besprochen?
Es seien A und B reelle 5×5-Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -3$. Berechnen Sie

$$\det(B^3 \cdot A^T \cdot B^T), \quad \det(2B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^T)\,,$$
$$\det(-3A) \quad \text{und} \quad \det(-B^2)\,.$$

71) Zeigen Sie: Wenn A eine 3×3-Matrix ist, dann ist

$$\det(A) = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) -$$
$$-A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31})\,.$$

Man nennt diese Art, die Determinante von A zu berechnen, sie „nach der ersten Zeile entwickeln“. Wie würden Sie das Analogon für die zweite und für die dritte Zeile formulieren? Und wie für die Spalten?

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Neue Jahr!